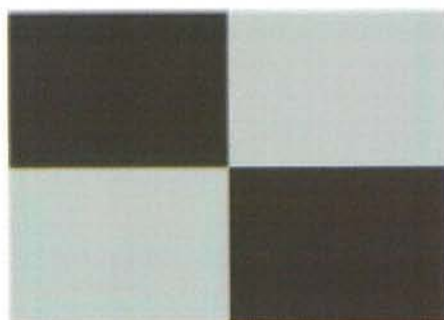


## L2 正則化法を用いたデータ駆動型一般化最小分散制御系の繰り返し設計

指導教員

増田 士 朗



首都大学東京大学院

システムデザイン研究科 システムデザイン専攻 経営システムデザイン学域

(平成29年度)

---

1 6 8 9 2 5 1 7

---

島本 慶 忠



## 目次

<b>1</b>	<b>はじめに</b>	<b>1</b>
1.1	データ駆動型制御	1
1.2	データ駆動型一般化最小分散制御における L2 正則化の導入	1
1.3	本論文の構成	2
<b>2</b>	<b>データ駆動型一般化最小分散制御</b>	<b>3</b>
2.1	問題設定	3
2.2	一般化最小分散制御	4
2.3	データ駆動型一般化最小分散制御	6
2.4	データ駆動型一般化最小分散制御の解析	8
2.5	先行研究の紹介	9
2.5.1	プラントパラメータを経由した制御器調整法	9
2.5.2	制御器構造を PID 型に限定した制御器調整法	11
<b>3</b>	<b>L2 正則化法を導入したデータ駆動型一般化最小分散制御</b>	<b>13</b>
3.1	L2 正則化	13
3.2	データ駆動型一般化最小分散制御の評価関数への L2 正則化法の導入	15
3.3	推定値の偏りを目的とした繰り返し設計の導入	15
3.4	推定値の収束性の解析	16
3.5	設計される制御系の安定性解析	19
<b>4</b>	<b>設計性能向上を目指した挑戦</b>	<b>23</b>
4.1	繰り返し設計回数の削減を目的とした正則化項のオフライン設計	23
4.2	最適な正則化行列の設計	25
<b>5</b>	<b>数値例</b>	<b>28</b>
5.1	基本設定	28
5.2	正則化の推定に与える影響	29
5.3	繰り返し設計による効果の評価	31
5.4	DoA(Domain of Attraction) を利用した安定性判別	38
5.5	正則化項のオフライン設計	40
5.6	正則化行列を総平均二乗誤差を評価基準として設計した際の制御性能評価	42
<b>6</b>	<b>おわりに</b>	<b>44</b>



# 1 はじめに

## 1.1 データ駆動型制御

近年、制御工学のコミュニティにおいて、制御の対象とするシステムのプラントモデルを経由することなく、システムに対する入出力データより直接的に制御器設計を行うデータ駆動型制御に対して注目が集まっている [1]. 制御器とは、制御の対象とするシステムに入力を加えるアクチュエータに対して指令を与える装置のことを制御工学では指しており、制御器設計は獲得されるシステムの出力に対して大きな影響を与える。そのためシステムより望ましい出力を獲得するためには、適切に制御器設計を行うことが大切となる。近年の主流な制御器設計法として、モデルベース制御 [2], [3] がある。モデルベース制御においては、制御の対象とするシステムのプラントモデルを正確に求め、それに基づき望ましい制御性能を獲得できるような制御器を設計していた。しかし正確にシステムの特性を反映するプラントモデルの次数は高次となりやすく、それに基づき設計される制御器も同様に高次の高次モデルとなってしまう。実際には使用する制御器の構造に合わせるため、獲得されたプラントモデルの次数の低次元化を行う。しかし低次元化されたプラントモデルには動特性の漏れが生じており、設計される制御系の性能が所望の値よりも劣化してしまう場合もある。これに対して冒頭でも述べたデータ駆動型制御においては、データより直接的に制御器設計を行うことでこの課題を回避することを目的としている。具体的には制御の対象とするシステムから取得される入出力データを用いて評価関数を構築することで、動特性の漏れを生じることなく制御器パラメータを導出し制御器設計を行うことが可能となる。この手法には制御の目的に合わせて様々な手法が提案されており、目標値追従性能の改善を目的としたものとして、IFT(Iterative Feedback Tuning)[4], [5], [6], VRFT(Virtual Reference Feedback Tuning)[7], [8], FRIT(Fictitious Reference Iterative Tuning)[9], [10] が考案されている。一方でプロセス制御においては、目標値追従制御ではなく、定値制御における外乱抑制性能の向上が望まれることも多い。このため外乱抑制性能の向上を目的として、データ駆動型一般化最小分散制御 [11] が提案されている。本論文の研究対象であるデータ駆動型一般化最小分散制御は、定値制御において、閉ループ系より取得される操業データより直接的に一般化最小分散制御を実現する制御器パラメータを求める手法である。操業データを用いて簡便に制御器調整ができる本手法であるが、先行研究 [11], [12], [13], [14] においては、評価関数の最適解の一意性が保証されず推定される制御器パラメータにばらつきが生じることが指摘されている。そのため最適化変数を制御器パラメータからシステムパラメータへ変更することや、制御器構造を PID 型に限定することが行われている。

## 1.2 データ駆動型一般化最小分散制御における L2 正則化の導入

先行研究においては、制御器構造を PID 型に限定することにより最小分散値を獲得できなくなってしまうこと。またシステムパラメータを最適化変数とすると、制御器設計がシステムパラメータの推定精度に依存してしまうことが課題として挙げられた。そこで本研究では、制御器の構造を一般化最小分散制御器とした場合にも、データより直接的に制御性能を改善できる制御器パラメータを推定することによって、前述した課題を解決することを目的とする。そのために本研究では、推定されるパラメータのばらつきの抑制を目的として、L2 正則化をデータ駆動型一般化最小分散制御に導入する。Hoerl らによって提案された L2 正則化 [15], [16] は、推定値の基準点からのばらつきを、評価関数である誤差二



乗和に正則化項を加えることで抑制するものである。L2 正則化は近年プラントモデルの同定やデータ駆動型制御に導入され成果を挙げている。Chen らは平均二乗誤差の評価において、より正確な FIR モデルを獲得と、適切な正則化行列の選択方法を提案した [17], [18]。一方、Formentin らは、VRFT などのデータ駆動型制御器調整に L2 正則化を導入し、雑音が混入した入出力データに対して制御器パラメータの推定値のばらつきを抑制する手法を提案している [19]。このように、L2 正則化は、様々な最適化問題において推定値のばらつきを抑制することに有効である。しかしこの L2 正則化を導入した際の課題として、推定値が真値に対して偏りを生じることが挙げられる。これに対して本研究においては、データの取得と制御器の調整を反復する繰り返し設計を L2 正則化と組み合わせ、正則化項を含めた評価関数全体を逐次更新していくことで、推定値の偏りを取り除くことを試みた。データの取得と制御器調整を反復する繰り返し設計は、前述した IFT や ICbT (Iterative Correlation based Tuning) [20] においても利用されている。しかしこれらの 2 つの手法においては、データの取得実験が多数回行う必要があることが課題とされたが、本手法においては、外乱より生成される入出力データを用いて制御器調整を行っているため、データを複数回取得するための負担も小さいものとなることが期待される。加えて本研究では、提案手法である L2 正則化を導入したデータ駆動型一般化最小分散制御のさらなる性能の改善を目的として、繰り返し設計により逐次推定される制御器パラメータの安定化保証、繰り返し設計の回数の削減を可能とするアプローチの考案にも取り組んだ。

### 1.3 本論文の構成

本論文の構成は以下のとおりである。2 章においては、はじめに本研究において考察の対象としたシステムの説明と、そのシステムに対して考案された一般化最小分散制御について記述した後、データ駆動型一般化最小分散制御とその課題について説明する。3 章においては、L2 正則化について記述した後、データ駆動型一般化最小分散制御に L2 正則化を導入した過程について紹介する。そして、提案手法より推定される制御器パラメータの性質を調べるべく行った解析の結果について示す。4 章においては、提案手法におけるデータの取得回数のさらなる削減を目的として、正則化項のオフライン設計、最適な正則化行列の設計について研究した結果について記述する。5 章においては、得られた結果を数値例によって確認する。6 章においては、本研究のまとめを述べる。

## 2 データ駆動型一般化最小分散制御

本章においては、データより直接的に一般化最小分散制御を実現する制御則を求める、データ駆動型一般化最小分散制御の概要を示す。この手法の基礎をなす一般化最小分散制御は、セルフチューニングコントロールに基礎をおく最小分散制御より拡張した手法で、評価規範に制御入力項を加えることで、制御系のロバスト性を向上し、最小分散制御で必要とされていたむだ時間が完全に既知、制御対象が最小位相系といった制限を緩和した手法となる。一般化最小分散制御は実装される制御系の外乱抑制性能を向上させるものであり、データ駆動型一般化最小分散制御においては、この一般化最小分散制御を実現する制御則を閉ループ定値制御データから直接的に求める手法である。このためデータの取得に際して、手間やコストのかかる開ループ実験やステップ応答実験をする必要がなく、制御器調整を行う際にプラントに与える負荷が小さいことが利点として挙げられる。2.1 節においては本手法で制御対象とするシステムである CARMA モデル、問題設定について説明をする。また 2.2 節においては本手法の基礎をなす一般化最小分散制御について紹介をする。2.3 節においては本手法であるデータ駆動型一般化最小分散制御について紹介する。2.4 節においては本手法の課題を示し、それを解析的に証明したものを紹介する。そして 2.5 節においてはこの課題に対応するために提案された手法を先行研究として紹介する。

### 2.1 問題設定

本研究においては、制御対象とするシステムとして線形離散時間モデルの一つである CARMA(Controlled Auto-Regressive Moving Average) モデルを考える。一入力一出力かつ時不変系であり、CARMA モデルの入力と出力の間には以下の関係式が成り立つ。

$$A(z^{-1})y(t) = z^{-k_m}B(z^{-1})u(t) + D(z^{-1})w(t) \quad (1)$$

$$\begin{cases} A(z^{-1}) = 1 + a_1z^{-1} + \dots + a_{n_a}z^{-n_a} \\ B(z^{-1}) = b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_{n_b}z^{-n_b} \\ D(z^{-1}) = 1 + d_1z^{-1} + \dots + d_{n_d}z^{-n_d} \end{cases}$$

ここで  $y(t)$  は出力、 $u(t)$  は入力、そして  $w(t)$  は平均 0、分散  $\sigma_w^2$  でかつ自己相関関数  $E[w(t)w(t+\tau)](\tau \neq 0)$  が 0 となる白色雑音である。また  $z^{-k_m}$  は  $k_m$  ステップのむだ時間を表しており、 $z^{-k_m}y(t + k_m) = y(t)$  が成り立つ。むだ時間とは入力を加えてからシステムが応答するまで、システムの応答に全く影響しない時間のことをいう。この CARMA モデルのブロック線図は以下に表される。

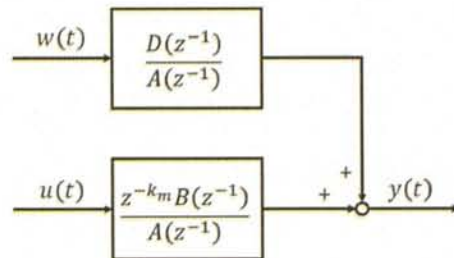


図 1: CARMA モデル

本研究において CARMA モデルは以下の仮定 A を満足するものを考える。

<仮定 A>

- A. 1  $A(z^{-1}), B(z^{-1}), D(z^{-1})$  の次数  $n_a, n_b, n_d$  とむだ時間  $k_m$  は既知とする。
- A. 2  $A(z^{-1}), B(z^{-1}), D(z^{-1})$  はそれぞれ既約である。
- A. 3  $A(z^{-1}), B(z^{-1})$  の係数を未知とする一方で  $D(z^{-1})$  を既知とする。
- A. 4 多項式の係数はすべてスカラとする。
- A. 5  $D(z^{-1})$  は安定多項式とする。

続いて伝達関数の大きさを評価する方法である、H2 ノルムについて紹介する。安定な伝達関数  $H(z)$  の H2 ノルムは次式で定義される。

$$\|H(z)\|_2 = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 d\omega \right)^{1/2} \quad (2)$$

この式から、H2 ノルムは各周波数でのゲインの平均であることが分かる。また伝達関数  $H(z)$  を信号  $h(t)$  の Z 変換とするとパーセバルの等式より

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} h(t)^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 d\omega \\ &= \|H(z)\|_2^2 \end{aligned} \quad (3)$$

が成り立つ。式 (2) と式 (3) から、複素領域上で表現されている H2 ノルムは、時間領域における 2 乗和に対応していることが分かる。これに加えて以降の議論においては、 $E[\cdot], \text{Var}[\cdot]$  はそれぞれ期待値、分散を表すものとする。

## 2.2 一般化最小分散制御

本節においては、本研究の対象としたデータ駆動型一般化最小分散制御の基本的なアイデアを与える一般化最小分散制御について説明する。一般化最小分散制御においては、一般化出力の分散を最小化する制御則の導出を行う。これにより制御系の外乱抑制性能の向上を実現する制御則を導出できる。本研究における定値制御という条件の下で、一般化出力は以下のように記述することができる。

$$\begin{aligned} \phi(t + k_m) &= P(z^{-1})y(t + k_m) + Q(z^{-1})u(t) \\ \begin{cases} P(z^{-1}) = 1 + p_1 z^{-1} + \dots + p_{n_p} z^{-n_p} \\ Q(z^{-1}) = q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_{n_q} z^{-n_q} \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

ここで  $P(z^{-1}), Q(z^{-1})$  は一般化出力の設計多項式であり、閉ループ系が望ましい特性をもつよう設計者により設定される。この分散である

$$J = \text{Var}[\phi(t + k_m)] \quad (5)$$



が一般化最小分散制御における評価規範となる。以降においては、式 (5) を最小化する制御則と、その際の評価関数の最小値となる最小分散値の導出を行う。まず現時刻  $t$  における  $\phi(t + k_m)$  の予測値を導出するべく、以下で定義される Diophantine 方程式を導入する。

$$\begin{aligned} P(z^{-1})D(z^{-1}) &= A(z^{-1})E(z^{-1}) + z^{-k_m}F(z^{-1}) \\ E(z^{-1}) &= 1 + e_1(z^{-1}) + \dots + e_{k_m}z^{-(k_m-1)} \\ F(z^{-1}) &= f_0 + f_1(z^{-1}) + \dots + f_{n_f}z^{-n_f} \\ n_f &= \max(n_a - 1, n_p + n_d - k_m) \end{aligned} \quad (6)$$

この Diophantine 方程式を導入すると  $\phi(t + k_m)$  を現在の入出力  $u(t)$ ,  $y(t)$  と制御不変量  $w(t + k_m)$  で書き表すことができる。以下においてはこの過程について解説する。またこれ以降遅れ演算子  $z^{-1}$  は省略する。はじめに (6) 式で定義される Diophantine 方程式の両辺に時刻  $t + k_m$  における出力  $y(t + k_m)$  をそれぞれ掛けると

$$PDy(t + k_m) = AEy(t + k_m) + z^{-k_m}Fy(t + k_m) \quad (7)$$

となる。続いて (1) で定義した CARMA モデルの性質を用いると

$$PDy(t + k_m) = EBu(t) + EDw(t + k_m) + Fy(t) \quad (8)$$

$$y(t + k_m) = \frac{EB + QD}{PD}u(t) + \frac{F}{PD}y(t) + \frac{E}{P}w(t + k_m) \quad (9)$$

となる。そしてこの (9) 式を  $\phi(t + k_m)$  に代入すると

$$\phi(t + k_m) = \frac{EB + QD}{D}u(t) + \frac{F}{D}y(t) + Ew(t + k_m) \quad (10)$$

となる。多項式  $E$  の次数は  $k_m - 1$  次であることから  $Ew(t + k_m)$  は、現時刻よりも未来のデータで構築され、現時刻までのデータ構築される (10) 式の第一項と第二項とは無相関となる。そのため (10) 式の両辺において分散をとると、

$$\text{Var}[\phi(t + k_m)] = \text{Var}\left[\frac{EB + QD}{D}u(t) + \frac{F}{D}y(t)\right] + \text{Var}[Ew(t + k_m)] \quad (11)$$

のように分けることができる。この時右辺第一項を 0 とする制御則が一般化最小分散制御則である。

$$u(t) = -\frac{F}{EB + QD}y(t) \quad (12)$$

一般化最小分散制御側を実装した場合一般化出力  $\phi(t + k_m)$  の分散は

$$\begin{aligned} \text{Var}[\phi(t + k_m)] &= \text{Var}[Ew(t + k_m)] \\ &= \|E\|_2^2 \sigma_w^2 \end{aligned} \quad (13)$$

となり最小分散値をとる。  $\phi(t + k_m)$  の最小分散値  $\|E\|_2^2 \sigma_w^2$  はむだ時間の影響によりどの入力を用いたとしても変化しない。このことから多項式  $E$  は制御不変量であるといえる。図 2 はこの制御則を閉ループ系に実装にしたときのブロック線図である。

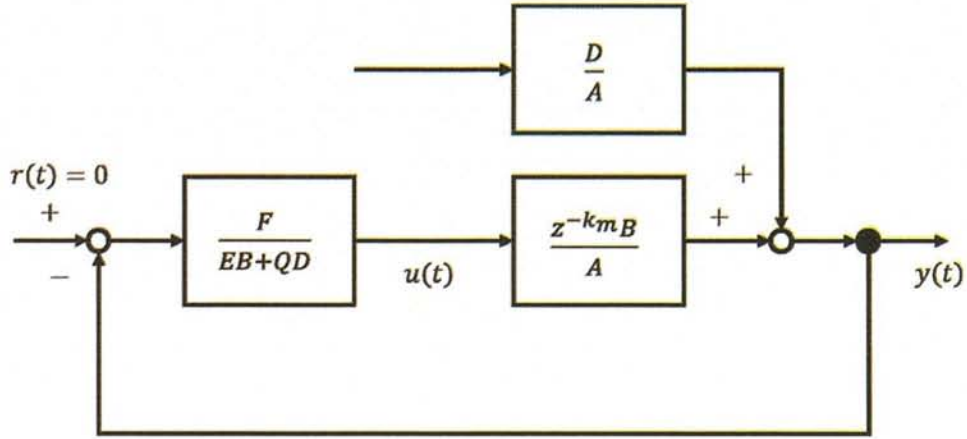


図 2: 一般化最小分散制御系

### 2.3 データ駆動型一般化最小分散制御

一般化最小分散制御においては、所望する制御則を求める際に、制御対象とするシステムのプラントモデルが既知であることが必要だった。プラントモデルを獲得するためにはシステム同定が必要で、それを行うには多大なるプラント負荷やコストがかかることが課題として挙げられている。この制御則を閉ループ定値制御データより、システム同定を行うことなく獲得することを目的としたのが、データ駆動型一般化最小分散制御である。本手法においては、前述したことを目的として、入出力データより最小値が一般化最小分散制御則を構成するパラメータと一致する評価関数を構築する。そしてこの評価関数に基づき取得された入出力データより制御器パラメータを推定する。はじめにこの評価関数を構築する過程について説明する。本研究においては、制御対象の特性が経時変動した状況を想定しており、初期制御器が変動後の制御系においても閉ループ系を安定化しているが、その制御性能には改善の余地があるものとする。そのような状況下において、現在の制御対象の特性にあった制御則を獲得し、外乱抑制性能を向上させることを目的とする。ここで初期制御器は変動前の CARMA モデルより導出された制御則であり、変動前の制御対象のプラントモデルをここにおいてはノミナルモデルと呼ぶ。この制御系より取得される入出力データを  $u_0(t), y_0(t)$  とすると、一般化出力は

$$\phi_0(t + k_m) = P y_0(t + k_m) + Q u_0(t) \quad (14)$$

と書くことができる。この  $\phi_0(t + k_m)$  に対して、前節で一般化最小分散制御則を導出する過程で得た式 (10) によって式 (15) のように  $\phi_0(t + k_m)$  を表現をすることができる。

$$\phi_0(t + k_m) = \frac{EB + QD}{D} u_0(t) + \frac{F}{D} y_0(t) + E w_0(t + k_m) \quad (15)$$

以降においては  $E$  を  $E^*$  と書くが、これは真値を表す。プラントモデルが未知であるため、前節と同じようにして制御則を求めることはできない。そこで  $E^*B + QD, F$  をそれぞれ可変パラメータとした  $S(\rho_S), F(\rho_F)$  を考える。ここで両者はそれぞれ

$$S(\rho_S) = \rho_{S(0)} + \rho_{S(1)} z^{-1} + \cdots + \rho_{S(n_s)} z^{-n_s}$$

$$\begin{aligned}
&= [1, z^{-1}, \dots, z^{-n_s}] [\rho_{S(0)}, \rho_{S(1)}, \dots, \rho_{S(n_s)}]^T \\
&= \xi_S^T \rho_S \\
F(\rho_F) &= \rho_{F(0)} + \rho_{F(1)} z^{-1} + \dots + \rho_{F(n_f)} z^{-n_f} \\
&= [1, z^{-1}, \dots, z^{-n_f}] [\rho_{F(0)}, \rho_{F(1)}, \dots, \rho_{F(n_f)}]^T \\
&= \xi_F^T \rho_F
\end{aligned}$$

と定義され、さらに  $S(\rho_S)$  は以下を満たすものとする.

$$S(\rho_S^*) = EB + QD \quad (16)$$

$$n_s = k_m + n_b - 1 \quad (17)$$

この  $F(\rho_F)$ ,  $S(\rho_S)$  を用いると本研究における制御則は

$$u(t) = -\frac{F(\rho_F)}{S(\rho_S)} y(t) \quad (18)$$

と書くことができる. 図3は、式(18)で表される制御則を閉ループ系に実装にしたときのブロック線図である.

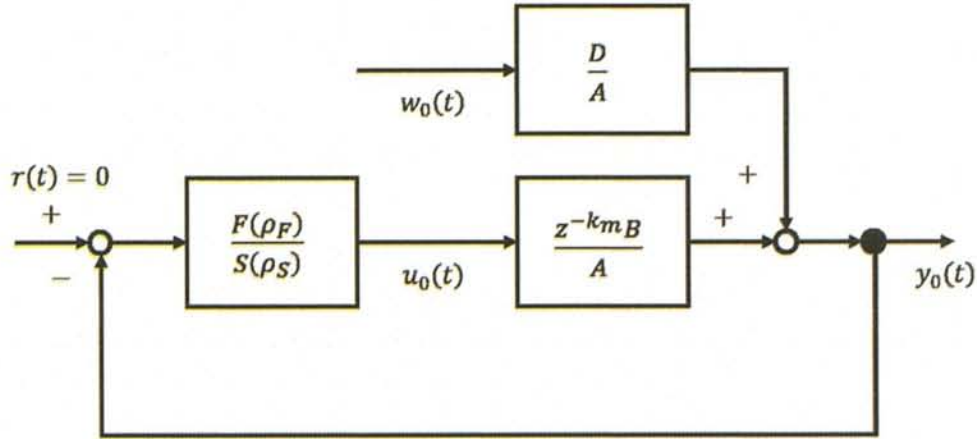


図3: データ駆動型一般化最小分散制御系

上で定義した多項式  $S(\rho_S)$ ,  $F(\rho_F)$  を用いると  $\phi_0(t + k_m)$  は

$$\phi_0(t + k_m) = \frac{S(\rho_S^*)}{D} u_0(t) + \frac{F(\rho_F^*)}{D} y_0(t) + E^* w_0(t + k_m) \quad (19)$$

と書くことができる. しかしこの一般化最小分散制御則を構成するパラメータ  $S(\rho_S^*)$ ,  $F(\rho_F^*)$  はプラントモデルが未知であるため求めることができない. そこでデータ駆動型一般化最小分散制御においては以下の評価関数を構築する.

$$J_d(\rho_S, \rho_F) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left( \phi_0(t + k_m) - \frac{S(\rho_S)}{D} u_0(t) - \frac{F(\rho_F)}{D} y_0(t) \right)^2 \quad (20)$$



上記の評価関数は  $S(\rho_S) = S(\rho_S^*)$ ,  $F(\rho_F) = F(\rho_F^*)$  となるときに、最小値  $\|E^*\|_2^2 \sigma_w^2$  を取る  
ことが式 (19) を式 (20) に代入することで分かる。そのため評価関数を最小化するパラメータ  
を求めることで一般化最小分散制御則を構成するパラメータ  $S(\rho_S^*)$ ,  $F(\rho_F^*)$  を獲得すること  
が可能となる。しかし式 (20) を最小二乗法で解くと逆行列が存在しないことから推定値は安  
定せず、中には制御系の性能を悪化させるような制御器パラメータも推定されることもあつ  
た。これは評価関数の最適性の条件を与える線形方程式の未知パラメータの数  $n_S + n_F + 2$   
が方程式の数  $n_S + n_F + 1$  よりも多いためと考えられる。次節においては最小二乗法にお  
いて逆行列が存在しないことを理論解析により示す。

## 2.4 データ駆動型一般化最小分散制御の解析

本節においては、データ駆動型一般化最小分散制御の評価関数を最小二乗法で解いた際に  
逆行列が存在しないことを理論解析により示す。そのために初期入出力データ  $u_0(t)$ ,  $y_0(t)$   
を白色雑音  $w_0(t)$  を用いて表すと

$$u_0(t) = \frac{-DF(\rho_F^0)}{AS(\rho_S^0) + BF(\rho_F^0)z^{-k_m}} w_0(t), \quad (21)$$

$$y_0(t) = \frac{DS(\rho_S^0)}{AS(\rho_S^0) + BF(\rho_F^0)z^{-k_m}} w_0(t), \quad (22)$$

と書ける。続いて、この式 (21), (22) を評価関数である式 (20) に代入すると

$$J_d(\rho_S, \rho_F) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left( \phi_0(t + k_m) - \frac{(-S(\rho_S)F(\rho_F^0) + F(\rho_F)S(\rho_S^0))}{AS(\rho_S^0) + BF(\rho_F^0)z^{-k_m}} w_0(t) \right)^2 \quad (23)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left( \phi_0(t + k_m) - \frac{(-\xi_S^T \rho_S F(\rho_F^0) + \xi_F^T \rho_F S(\rho_S^0))}{AS(\rho_S^0) + BF(\rho_F^0)z^{-k_m}} w_0(t) \right)^2 \quad (24)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left( \phi_0(t + k_m) - \frac{[-\xi_S^T F(\rho_F^0) \quad \xi_F^T S(\rho_S^0)] \begin{bmatrix} \rho_S \\ \rho_F \end{bmatrix}}{AS(\rho_S^0) + BF(\rho_F^0)z^{-k_m}} w_0(t) \right)^2 \quad (25)$$

となり、さらに式 (27) で定義される変数  $\xi_{uy}$  を用いると

$$J_d(\rho) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (\phi_0(t + k_m) - \xi_{uy}^T \rho)^2 \quad (26)$$

のように  $\rho$  に関して二次線形に書くことができる。また  $\xi_{uy}$ ,  $\rho$  は次のように定義される。

$$\xi_{uy} = \frac{1}{AS(\rho_S^0) + BF(\rho_F^0)z^{-k_m}} \begin{bmatrix} -F(\rho_F^0)\xi_S \\ S(\rho_S^0)\xi_F \end{bmatrix} w_0(t), \quad (27)$$

$$\rho = [\rho_S^T, \rho_F^T]^T \quad (28)$$

この式 (26) は  $\rho$  に関して最小二乗法で解くことができる。

$$\rho = \left[ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \xi_{uy} \xi_{uy}^T \right]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \xi_{uy} \phi_0(t + k_m) \quad (29)$$



最小二乗法により求められたパラメータについて解析を行う。まず先程定義した変数  $\xi_{uy}$  は  $\Phi(\rho_F^0, \rho_S^0)$  を用いて

$$\xi_{uy} = \frac{1}{AS(\rho_S^0) + BF(\rho_F^0)z^{-k_m}} \Phi(\rho_F^0, \rho_S^0) \begin{bmatrix} 1 \\ z^{-1} \\ \vdots \\ z^{-(n_s+n_f)} \end{bmatrix} w_0(t) \quad (30)$$

と書くことができる。また  $\Phi(\rho_F^0, \rho_S^0) \in \mathbb{R}^{(n_f+n_s+2) \times (n_f+n_s+1)}$  は

$$\Phi(\rho_F^0, \rho_S^0) = \begin{bmatrix} -\rho_{F(0)}^0 & -\rho_{F(1)}^0 & \cdots & -\rho_{F(n_f)}^0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\rho_{F(0)}^0 & -\rho_{F(1)}^0 & \cdots & -\rho_{F(n_f)}^0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\rho_{F(0)}^0 & -\rho_{F(1)}^0 & \cdots & -\rho_{F(n_f)}^0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\rho_{F(0)}^0 & -\rho_{F(1)}^0 & \cdots & -\rho_{F(n_f)}^0 \\ \rho_{S(0)}^0 & \rho_{S(1)}^0 & \cdots & \rho_{S(n_s)}^0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{S(0)}^0 & \rho_{S(1)}^0 & \cdots & \rho_{S(n_s)}^0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \rho_{S(0)}^0 & \rho_{S(1)}^0 & \cdots & \rho_{S(n_s)}^0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \rho_{S(0)}^0 & \rho_{S(1)}^0 & \cdots & \rho_{S(n_s)}^0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

と定義される。この行列は縦長のテプリッツ行列となっているため、 $z^T \Phi(\rho_F^0, \rho_S^0) = 0$  を満たすようなベクトル  $z^T \neq 0_{1 \times (n_f+n_s+2)}$  が存在する。これにより  $\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \xi_{uy} \xi_{uy}^T$  は特異行列となるため、データ駆動型一般化最小分散制御の評価関数  $J_d(\rho)$  を最小化するパラメータは一意的に定まらなくなる。

## 2.5 先行研究の紹介

本節においては、データ駆動型一般化最小分散制御における評価関数の最適解の一意性が保証されていないという課題を解決した先行研究 [11], [12] について紹介をする。

### 2.5.1 プラントパラメータを経由した制御器調整法

データ駆動型一般化最小分散制御において最適解の一意性が定まらなかった原因は、変数の数が方程式の数よりも多かったためである。ここに着目した制御器調整法が本小節で紹介するプラントパラメータを経由した制御器調整法である [11]。この制御器調整法においては最適化変数を可変パラメータ  $S(\rho_S), F(\rho_F)$  から、可変パラメータ化した CARMA モデルの多項式  $A(\rho_A), B(\rho_B)$  に変更することで課題に対応している。ここにおいては CARMA モデルのパラメータを最適化変数とするために可変パラメータ化した CARMA モデルの多項式  $A(\rho_A), B(\rho_B)$  を以下のように定義する。

$$A(\rho_A) = 1 + \rho_{A(1)} z^{-1} + \cdots + \rho_{A(n_a)} z^{-n_a}$$

$$B(\rho_B) = \rho_{B(0)} + \rho_{B(1)}z^{-1} + \cdots + \rho_{B(n_b)}z^{-n_b}$$

この多項式を用いると  $S(\rho_S), F(\rho_F)$  は以下のように書くことができる.

$$S(\rho_S) = E^*B(\rho_B) + QD \quad (32)$$

$$F(\rho_F) = PDz^{k_m} - A(\rho_A)E^*z^{k_m} \quad (33)$$

これと同じように  $S(\rho_S^*), F(\rho_F^*)$  も以下のように書くことができる.

$$S(\rho_S^*) = E^*B(\rho_B^*) + QD \quad (34)$$

$$F(\rho_F^*) = PDz^{k_m} - A(\rho_A^*)E^*z^{k_m} \quad (35)$$

そして式 (32), (33), (34), (35) を式 (20) 代入すると

$$J_d(\rho_A, \rho_B) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left( \frac{E^*z^{k_m}(A(\rho_A^*) - A(\rho_A))}{D} u_0(t) - \frac{E^*z^{k_m}(B(\rho_B^*) - B(\rho_B))}{D} y_0(t) + E^*w_0(t + k_m) \right)^2 \quad (36)$$

となる. ここで  $\tilde{A} = A(\rho_A^*) - A(\rho_A), \tilde{B} = B(\rho_B^*) - B(\rho_B)$  とおく. さらに右辺第一項, 第二項と第三項のデータ同士の無相関性を用いると

$$J_d(\rho_A, \rho_B) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left( \frac{E^*z^{k_m}\tilde{A}}{D} u_0(t) - \frac{E^*z^{k_m}\tilde{B}}{D} y_0(t) \right)^2 + \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (E^*w_0(t + k_m))^2 \quad (37)$$

と書き換えることができる. さらに式 (21), (22) を代入すると以下に等式変形できる.

$$J_d(\rho_A, \rho_B) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left( \frac{E^*(\tilde{A}F(\rho_F^0) + \tilde{B}S(\rho_S^0))}{AS(\rho_S^0) + BF(\rho_F^0)z^{-k_m}} w_0(t) \right)^2 + \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (E^*w_0(t + k_m))^2 \quad (38)$$

このとき上式においては右辺第二項は定数であるため,  $J_d(\rho_A, \rho_B)$  を最小化することは右辺第一項が最小化することと等しくなる. そして  $E^*$  が一般化出力  $\phi_0(t + k_m)$  を用いて推定することができることから, 方程式の数は  $n_S + n_F + 1$  のままであるが, 未知パラメータの数が  $n_S + n_F + 1$  となる. 方程式の数と未知パラメータの数が一致するため,  $A(\rho_A), B(\rho_B)$  をここにおいては一意に求めることができる. 実際の計算においてはさらに式変形を行った以下の式を評価関数として用いる.

$$J_d(\rho_A, \rho_B) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \frac{E^*}{D} (A(\rho_A)y_0(t + k_m) - B(\rho_B)u_0(t))^2 \quad (39)$$

そして上記の評価関数を最小化する  $A(\rho_A^*), B(\rho_B^*)$  と推定した  $E^*$  を式 (34), (35) に代入することで, 一般化最小分散制御則を実現する制御器パラメータ  $S(\rho_S^*), F(\rho_F^*)$  を一意に求めることを可能としている.

### 2.5.2 制御器構造をPID型に限定した制御器調整法

続いて制御器構造をPID型に限定することで、変数の数が方程式の数よりも多くなるという課題に対応した横山らの研究について紹介をする。PID制御器は実際の制御の現場で多く用いられており、データ駆動型一般化最小分散制御の実応用化の実現を目的として提案法は考案された。PID制御器の構造は比例ゲイン  $K_p$ 、積分時間  $T_i$ 、微分時間  $T_d$  という三要素を用いて以下のように表される。

$$\begin{aligned}\Delta u(t) &= \frac{L(\rho_L)}{1} y(t) \\ &= -K_p \left\{ \left( \frac{T_S}{T_i} + 1 + \frac{T_d}{T_S} \right) - \left( 1 + 2\frac{T_d}{T_S} \right) z^{-1} + \frac{T_d}{T_S} z^{-2} \right\} y(t)\end{aligned}\quad (40)$$

ここで  $\Delta = 1 - z^{-1}$  とする。このとき、式(40)における多項式  $L(\rho_L)$  の係数をまとめて  $l_0, l_1, l_2$  とすることで、 $L(\rho_L)$  は係数ベクトル  $\rho_L$  で与えられる2次の多項式となる。

$$L(\rho_L) = l_0 + l_1 z^{-1} + l_2 z^{-2} \quad (41)$$

2.3節の式(20)をみると、 $S(\rho_S), F(\rho_F)$  がそれぞれ一般化最小分散制御則を構成する分母多項式、分子多項式に相当することが分かる。データ駆動型制御器調整は先に制御器構造を与えることができ、与えられた制御器構造の中で評価指標に対し、最も性能の良い制御器パラメータを選択できるという利点がある。本論文においてはこの利点を活かし、制御則を構成する多項式  $F(\rho_F), S(\rho_S)$  を、PIDゲインによってパラメータ化された2次の多項式  $L(\rho_L)$  と定数1であるとし、制御器調整前に制御器構造の限定を行う。すなわち、一般化最小分散評価に基づくPIDゲイン調整を行う評価関数  $J_{\text{PID}}$  を、多項式  $L(\rho_L)$  を用いて式(42)のように定義する。

$$J_{\text{PID}} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left( \phi_0(t+k_m) - \frac{1}{D} \Delta u_0(t) - \frac{L(\rho_L)}{D} y_0(t+k_m) \right)^2 \quad (42)$$

初期の入出力データを白色雑音  $w_0(t)$  から  $u_0(t), y_0(t)$  への伝達関数を用いて表すと

$$\Delta u_0(t) = \frac{-DL(\rho_L^0)}{\Delta A + BL(\rho_L^0)z^{-k_m}} w_0(t), \quad (43)$$

$$y_0(t) = \frac{D}{\Delta A + BL(\rho_L^0)z^{-k_m}} w_0(t), \quad (44)$$

となる。式(43), 式(44)を用い評価関数に対して  $N \rightarrow \infty$  とする理想的状況を考えて理論値に基づき評価関数を解析すると

$$J_{\text{PID}} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left( \frac{F(\rho_F^*) - L(\rho_L) - L(\rho_L^0)(S(\rho_S^*) - 1)}{\Delta A + BL(\rho_L^0)z^{-k_m}} \right)^2 + \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (E^* w(t+k_m))^2, \quad (45)$$

$$= \sigma_w^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{F(\rho_F^*) - L(\rho_L) - L(\rho_L^0)(S(\rho_S^*) - 1)}{\Delta A + BL(\rho_L^0)(e^{j\omega})^{-k_m}} \right|^2 d\omega + \sigma_w^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |E^*|^2 d\omega, \quad (46)$$

となる。式(46)は  $\rho_L$  に関して2次式で表されているので、 $\rho_L$  は最小二乗法を用いて求めることができる。ここで多項式  $L(\rho_L)$  が  $L(\rho_L) = \beta^T \rho_L$  となることに注意すると、 $\rho_L$  の導出式は式(47)のようになる。

$$\rho_L = \left( \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\bar{\beta}\beta^T}{|\Delta A + BL(\rho_L^0)(e^{j\omega})^{-k_m}|^2} d\omega \right)^{-1} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\text{Re}[\overline{F(\rho_F^*)\beta}] - \text{Re}[\overline{L(\rho_L^0)(S(\rho_S^*) - 1))\beta}]}{\Delta A + BL(\rho_L^0)(e^{j\omega})^{-k_m}} d\omega \right) \quad (47)$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} M(\rho_L^0)^{-1}g(\rho_L^0) \quad (48)$$

$\beta$  は  $\omega$  の関数としてフルランクとなるので、 $M(\rho_L^0)$  は逆行列が存在する。このため式 (46) を最小化する  $\rho_L$  は一意に求めることができる。式 (47) の右辺をみると、各多項式は  $\rho_L^0$  を含んでおり、最小二乗法によって推定されるパラメータ  $\rho_L$  は、初期制御器パラメータに依存していることが分かる。横山らの研究においては、この課題に対して、データの取得と制御系の設計を反復する繰り返し設計により、評価関数を逐次更新することで対応している。また初期制御器パラメータが推定されるパラメータによって逐次更新され、 $\rho_L$  がある不動点に収束することに関して理論的な証明を行っている。



### 3 L2正則化法を導入したデータ駆動型一般化最小分散制御

データ駆動型一般化最小分散制御の評価関数においては、制御器構造を一般化最小分散制御器とした場合に最適解の一意性が保証されていない。これにより制御器パラメータを推定する際に取得されるデータによって、推定される制御器パラメータにばらつきが生じることがシミュレーションでも確認されている。なかには制御性能を劣化させるような制御

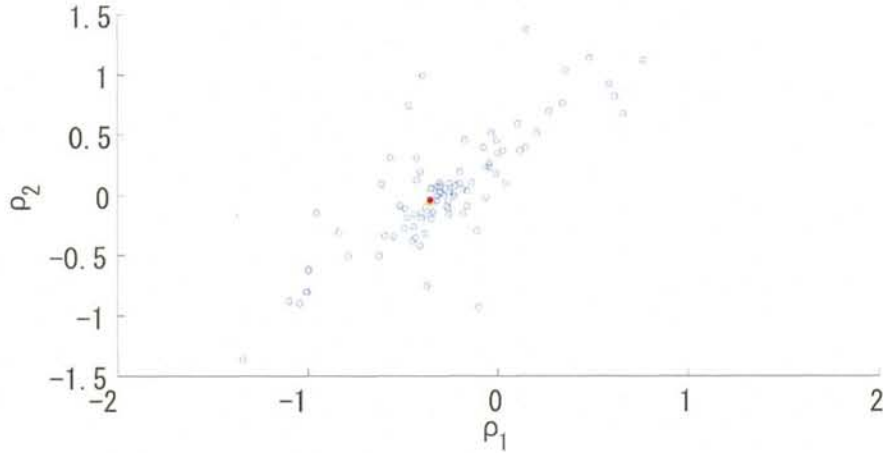


図 4: 推定されるパラメータのばらつき

器パラメータが推定されてしまうこともあるため、先行研究においてはプラントパラメータ経由で制御器パラメータを求めることや、調整する制御器の構造を限定することで対応していた。一方で本研究においては、一般化最小分散制御器を用いて直接的にデータより制御器調整を行うことを目的としている。具体的には最適解の一意性を保証し、安定して制御性能を改善する制御器パラメータを推定するために L2 正則化の導入を行った。本章においてはこの仮定と解析結果について説明していくが、まず本手法に導入した L2 正則化について 3.1 節にて記述する。3.2 節においては、L2 正則化のデータ駆動型一般化最小分散制御への導入と考察について記述する。3.3 節においては、データの取得と制御器の調整を反復して行う繰り返し設計を用いて評価関数を逐次更新し、正則化項の影響を弱めることで真値を獲得することを目的とした研究について記述する。3.4 節においては、推定値の収束性について解析を行い、3.5 節においては DoA(Domain of Attraction)[21] の考え方を利用して設計される制御系の安定性解析を行った。

#### 3.1 L2 正則化

L2 正則化は重回帰分析によりパラメータを推定する際に、多重共線性により推定値が不定ないし不安定となることに対する解決法として考案されたものである。評価関数である誤差二乗和に正則化項を加えることで、推定値が真値に対する偏りを生じることと引き換えに推定毎のパラメータのばらつきが小さくなる。この L2 正則化を従属変量  $y(N \times 1)$ ,  $p$  変量の独立変量  $X(N \times p)$ , 回帰係数のベクトルを  $\beta$ ,  $\epsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$  を残差ベクトルとして

定義された1入力1出力システムを元にして説明をしていく．ここで  $\beta^*$  は回帰係数ベクトルの真値である．

$$y = X\beta^* + \epsilon \quad (49)$$

従来の重回帰分析においては，取得されたデータより従属変量と独立変量の誤差二乗和を最小化する  $\beta$  を求めることで，対象とするシステムのモデリングを行っていた．

$$\hat{\beta} = \operatorname{argmin}(y - X\beta)^T(y - X\beta) \quad (50)$$

しかしこの手法においては， $X^T X$  がフルランク行列とならない場合に推定値が不定ないし不安定になってしまう課題があった．これに対して L2 正則化においては誤差二乗和に対して，推定されるパラメータの基準点から偏差に対してペナルティを与える正則化項を加える．またこの手法が L2 正則化と呼ばれるのは，推定されるパラメータを  $\beta$ ，基準点  $\beta^{(0)}$  を 0，正則化行列を  $R$  とした時，正則化項が  $\beta^T R \beta$  と行列  $R$  の二次形式で表されることに由来する．

$$(y - X\beta)^T(y - X\beta) + \beta^T R \beta \quad (\beta^{(0)} = 0) \quad (51)$$

この正則化項により推定されるパラメータの基準点からのばらつきや，逆行列が存在しないため推定値が不定ないし不安定となることを解決できる．

$$\hat{\beta} = [X^T X + R]^{-1} X^T y \quad (52)$$

これは評価関数上で推定値の基準点からの偏差に対してペナルティを加えていること，また正則化行列  $R$  を導入することで逆行列が存在させているためである．以下の図は L2 正則化を導入した評価関数より推定されるパラメータのイメージ図である．このような L2 正

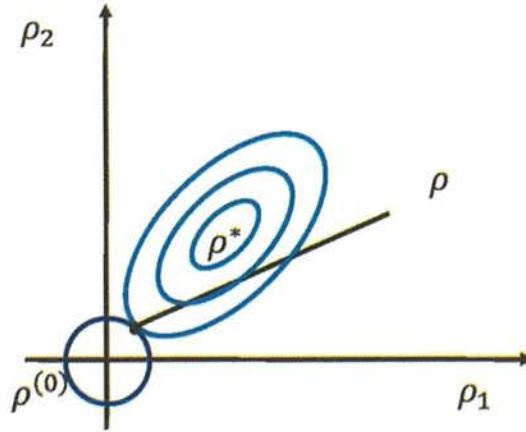


図 5: L2 正則化のイメージ図

則化は，データより評価関数を構築しパラメータを推定するデータ駆動型制御に対しても導入が行われている．VRFT においては取得される出力データに観測雑音が付加される場合に推定値がばらつくという課題があった．これに対して Formentin らは L2 正則化を評価関数に導入し，正則化項の設計を最適化することで，L2 正則化の導入前に比べて制御性能を安定して改善できる制御器パラメータの推定に成功している．

### 3.2 データ駆動型一般化最小分散制御の評価関数へのL2正則化法の導入

前節で説明したL2正則化を、本節においてはデータ駆動型一般化最小分散制御の評価関数に導入する。評価関数の最適解の一意性が保証されないという課題をL2正則化の導入により解決することを目指す。L2正則化を導入した評価関数は以下の通りとなる。

$$J_{dL}(\rho) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (\phi_0(t+k_m) - \xi_{uy}^T \rho)^2 + (\rho - \rho^{(0)})^T R (\rho - \rho^{(0)}) \quad (53)$$

L2正則化においては基準点にどのパラメータを用いるかが重要なポイントであった。式(53)からは、基準点からの偏差を小さくするようなパラメータが推定されるためである。修正された評価関数において $\rho^{(0)}$ は基準点であり、ここにおいてはデータ駆動型一般化最小分散制御が仮定する閉ループ系を安定にしている初期制御器パラメータを用いる。これにより安定な制御器パラメータとの偏差をなるべく小さくしつつ、誤差二乗和を小さくするパラメータが推定されるようになる。また正則化行列 $R \in \mathbb{R}^{(n_f+n_s+2) \times (n_f+n_s+2)}$ は、誤差二乗和と基準点からの推定値の偏差のどちらを小さくすることに重きをおくかを決定する正則化行列である。この評価関数を $\rho$ に関して最小二乗法で解いたものが

$$\rho = \left( \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \xi_{uy} \xi_{uy}^T + R \right)^{-1} \left( \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \xi_{uy} \phi_0(t+k_m) + R \rho^{(0)} \right) \quad (54)$$

となる。式(54)をみると、適切な正則化行列 $R$ を用いることで、 $\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \xi_{uy} \xi_{uy}^T + R$ に逆行列が存在し、推定値が一意に定まることが分かる。一方で、L2正則化の導入された評価関数においては、正則化項の影響により一般化最小分散制御器パラメータ $\rho^*$ の時に最小値をとらず、推定されるパラメータ $\rho$ は真値に対して偏りを生じてしまう。また基準点 $\rho^{(0)}$ に近いほど正則化項の影響は弱まり、真値に対する偏りが小さいパラメータが推定できると考えられる。

### 3.3 推定値の偏りを目的とした繰り返し設計の導入

前節においては、L2正則化項を評価関数に導入したが、これにより推定値には真値に対する偏りが生じてしまった。一方で真値に近い基準点を用いれば正則化項の影響を弱めることができる。そのため本節においては、繰り返し設計により正則化項と誤差二乗和を更新することでその影響を弱め、最終的に一般化最小分散制御器パラメータを獲得することを目指した研究を紹介する。繰り返し設計とはデータの取得と制御器の設計を反復して行うものである。

<本研究における繰り返し設計>

- (1) 設計された制御系より入出力データを取得する。
- (2) 取得したデータとデータを取得する際に使用した制御器パラメータを用いて評価関数を構築する。
- (3) 構築した評価関数より、最小二乗法を用いて制御器パラメータを推定する。
- (4) 推定された制御器パラメータを用いて制御器調整を行い、制御系を再設計する。



上記の (1) → (4) を繰り返すことをここにおいては繰り返し設計と呼ぶ。以降においては繰り返し設計の回数を変数に書き加えるようにする。推定されるパラメータ  $\rho^{(i+1)}$  は、繰り返し設計を  $i$  回行った制御系から取得された入出力データより推定されたパラメータであることを示す。また  $\xi_{uy}^{(i+1)}$ ,  $\phi_0^{(i+1)}(t+k_m)$  は、 $i+1$  回繰り返し設計を行った制御系より取得された入出力データを用いて構成された変数であることを示す。これらを用いると  $\rho^{(i+1)}$  を推定する評価関数は次のように記述できる。

$$J_{dL}(\rho^{(i+1)}) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left( \phi_0^{(i)}(t+k_m) - \xi_{uy}^{(i)T} \rho^{(i+1)} \right)^2 + (\rho^{(i+1)} - \rho^{(i)})^T R (\rho^{(i+1)} - \rho^{(i)}) \quad (55)$$

正則化項は推定されるパラメータを用いて逐次更新されており、 $\rho^{(i)}$  が真値に近いパラメータであれば正則化項の影響が弱まり、式 (55) より一般化最小分散制御器に近いパラメータを推定することが可能となる。このことから次節においては、逐次推定されるパラメータの収束性について解析を行う。

### 3.4 推定値の収束性の解析

本節においては繰り返し設計により逐次推定されるパラメータの収束性の解析を行う。まず式 (55) を  $\rho^{(i+1)}$  に関して最小二乗法で解くと

$$\rho^{(i+1)} = \left( \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \xi_{uy}^{(i)} \xi_{uy}^{(i)T} + R \right)^{-1} \left( \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \xi_{uy}^{(i)} \phi_0^{(i)}(t+k_m) + R \rho^{(i)} \right) \quad (56)$$

となる。また以下で定義される  $M^{(i)}$  を用いると

$$\rho^{(i+1)} = \left( M^{(i)} + R \right)^{-1} \left( \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \xi_{uy}^{(i)} \phi_0^{(i)}(t+k_m) + R \rho^{(i)} \right) \quad (57)$$

$$M^{(i)} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \xi_{uy}^{(i)} \xi_{uy}^{(i)T} \quad (58)$$

となる。一般化出力  $\phi_0^{(i)}(t+k_m)$  は  $\phi_0(t+k_m)$  と同じようにして以下のように展開することができる。

$$\phi_0^{(i)}(t+k_m) = \frac{S(\rho_S^*)}{D} u_0^{(i)}(t) + \frac{F(\rho_F^*)}{D} y_0^{(i)}(t) + E^* w_0^{(i)}(t+k_m) \quad (59)$$

$$= \xi_{uy}^{(i)T} \rho^* + E^* w_0^{(i)}(t+k_m) \quad (60)$$

式 (60) を式 (58) に代入すると

$$\begin{aligned} \rho^{(i+1)} &= \left( M^{(i)} + R \right)^{-1} \left( \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \xi_{uy}^{(i)} \xi_{uy}^{(i)T} \rho^* + \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \xi_{uy}^{(i)} E^* w_0^{(i)}(t+k_m) + R \rho^{(i)} \right) \\ &= \left( M^{(i)} + R \right)^{-1} \left( M^{(i)} \rho^* + \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \xi_{uy}^{(i)} E^* w_0^{(i)}(t+k_m) + R \rho^{(i)} \right) \end{aligned} \quad (61)$$



となる．ここで白色雑音の平均が0となる性質から， $\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \xi_{ny}^{(i)} E^* w_0^{(i)}(t + k_m)$  はデータ数  $N \rightarrow \infty$  とした時0となる．データ数が非常に多いという理想状態において，式(61)は

$$\rho^{(i+1)} = (M^{(i)} + R)^{-1} (M^{(i)} \rho^* + R \rho^{(i)}) \quad (62)$$

となる．さらに  $(M^{(i)} + R)^{-1} (R \rho^{(*)} - R \rho^{(i)}) = 0$  を用いると式(62)は以下のように展開できる．

$$\rho^{(i+1)} = \rho^* + (M^{(i)} + R)^{-1} R(\rho^{(i)} - \rho^{(*)})$$

さらに  $\rho^*$  を左辺に移行すると

$$\rho^{(i+1)} - \rho^* = (M^{(i)} + R)^{-1} R(\rho^{(i)} - \rho^{(*)})$$

となる．これをみると  $\rho^{(i+1)}$  は  $\rho^{(i)}$ ,  $\rho^*$ , 繰り返し設計  $i$  回目の制御系より得られた入出力データと正則化行列  $R$  を用いて記述されており，両者の間の関係を漸化式で表すことができている．この性質を用いると  $\rho^{(i+1)} - \rho^*$  はさらに展開することができる

$$\begin{aligned} \rho^{(i+1)} - \rho^* &= (M^{(i)} + R)^{-1} R (M^{(i-1)} + R)^{-1} R(\rho^{(i-1)} - \rho^{(*)}) \\ &= \prod_{k=0}^i \{ (M^{(k)} + R)^{-1} R \} (\rho^{(0)} - \rho^{(*)}) \end{aligned} \quad (63)$$

式(63)のように真値と初期値の距離ベクトル  $\rho^{(0)} - \rho^{(*)}$  を用いて記述できる．これをみると  $\rho^{(i+1)} - \rho^*$  は， $\rho^{(0)} - \rho^{(*)}$  を更新行列  $\prod_{k=0}^i \{ (M^{(k)} + R)^{-1} R \}$  に作用させているベクトルであることが分かる．ベクトルを行列に作用させると，そのベクトルは行列のもつ各固有ベクトルの方向に対応する固有値倍される．仮に更新行列の固有値がすべて0となれば， $\rho^{(0)} - \rho^{(*)}$  は零ベクトルに射影され， $\rho^{(i+1)} - \rho^*$  は零ベクトルとなる．このため  $\rho^{(i+1)} = \rho^*$  となり一般化最小分散制御器パラメータを獲得できると考えられる．このように更新行列は推定されるパラメータの性質を特徴付ける上で重要な役割を果たすことが分かった．以下においてはこの更新行列に関して成り立つ命題を示しその証明を行った．

<更新行列  $(M^{(k)} + R)^{-1} R$  に関して成り立つ命題>

**命題 1.** 正則化行列  $R$  が正定値行列の時，更新行列  $(M^{(k)} + R)^{-1} R$  の固有値はすべて1以下となる．

**命題 2.** 更新行列  $(M^{(k)} + R)^{-1} R$  の固有値のうち一つは1となる．

**命題 3.** 正則化行列  $R$  が  $R = \gamma I$  のように単位行列の定数倍で表される時，更新行列  $(M^{(k)} + R)^{-1} R$  は対称行列となる

以下においてはこの命題1，命題2，命題3の証明を行う．

命題1の証明: 正則化行列  $R = \gamma I$  を用いた場合， $R$  が対称行列であることから  $R = W^T W$  と分解することができる．このような行列  $W$  を用いると更新行列  $(M^{(k)} + R)^{-1} R$  は式(64)ように変形することができる．

$$(M^{(k)} + R)^{-1} R = (M^{(k)} + W^T W)^{-1} W^T W$$

$$\begin{aligned}
&= (M^{(k)} + W^T W)^{-1} (W^{-1} W^{-T})^{-1} \\
&= [W^{-1} W^{-T} (M^{(k)} + W^T W)]^{-1} \\
&= [W^{-1} (W^{-T} M^{(k)} + W)]^{-1} \\
&= [W^{-1} (W^{-T} M^{(k)} W^{-1} + I) W]^{-1} \\
&= W^{-1} (W^{-T} M^{(k)} W^{-1} + I)^{-1} W
\end{aligned} \tag{64}$$

行列  $W^{-1} (W^{-T} M^{(k)} W^{-1} + I)^{-1} W$  は更新行列  $(M^{(k)} + R)^{-1} R$  の相似変換となっている。そのため  $(M^{(k)} + R)^{-1} R$  と  $(W^{-T} M^{(k)} W^{-1} + I)^{-1}$  の固有値は等しくなる。一般に、ある行列の逆行列の固有値は、その行列の固有値の逆数となっているので、 $W^{-T} M^{(k)} W^{-1} + I$  の固有値が 1 以上であれば題意を証明することができる。ここで  $M^{(k)}$  は正定値行列より、任意のベクトル  $v \neq 0$  に対して  $v^T (W^{-T} M^{(k)} W^{-1} + I) v \geq v^T v$  となるので、明らかに固有値は 1 以上となる。また  $M^{(k)} v_{(1)} = 0, v_{(1)} \neq 0$  に対応する固有値の場合を除いては固有値は 1 以下となる。以上が命題 1 の証明となる。□

命題 2 の証明:  $M^{(k)}$  は特異行列である。そのため  $M^{(k)} z^{(k)} = 0$  を満たす  $z^{(k)} \neq 0$  が存在する。このとき以下の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
(M^{(k)} + R) z^{(k)} &= M^{(k)} z^{(k)} + R z^{(k)} \\
&= R z^{(k)}
\end{aligned} \tag{65}$$

従って  $z^{(k)} = (M^{(k)} + R)^{-1} R z^{(k)}$  を満たす  $z^{(k)}$  が存在する。これにより  $(M^{(k)} + R)^{-1} R$  の固有値のうち一つは 1 となる。以上が命題 2 の証明となる。□

命題 3 の証明:  $M^{(k)} = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \xi_{uy}^{(k)} \xi_{uy}^{(k)T}$  は、同じ要素を持つベクトル同士を掛け合わせているため対称行列となる。正則化行列  $R = \gamma I$  を用いると、更新行列  $(M^{(k)} + R)^{-1} R$  は式 (66) ように変形することができる。

$$\begin{aligned}
(M^{(k)} + R)^{-1} R &= (M^{(k)} + \gamma I)^{-1} \gamma I \\
&= \gamma (M^{(k)} + \gamma I)^{-1}
\end{aligned} \tag{66}$$

$M^{(k)} + \gamma I$  が対称行列となることから  $\gamma (M^{(k)} + \gamma I)^{-1}$  もまた対称行列となる。以上が命題 3 の証明となる。□

以下においてはこの証明された命題 1、命題 2、命題 3 を用いて、 $(\rho^{(k+1)} - \rho^*)$  の性質を示した定理の証明を行う。

<推定されるパラメータ  $\rho^{(k+1)}$  に関して成り立つ定理>

**定理 1.** 正則化行列を  $R = \gamma I$  とした時、推定されるパラメータ  $\rho^{(k+1)}$  は、基準点として用いたパラメータ  $\rho^{(k)}$  と比較して真値パラメータ  $\rho^*$  との距離を縮小する。

定理 1 の証明: 更新行列  $(M^{(k)} + R)^{-1} R$  の正規直交化された固有ベクトルを  $v_1^{(k)}, v_2^{(k)}, \dots, v_{\bar{n}}^{(k)}$ , 対応する固有値を  $\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, \dots, \lambda_{\bar{n}}^{(k)}$  とする。ここで  $\bar{n}$  は更新行列のサイズ  $n_f + n_s + 2$  を示す。また固有値に関しては命題 1、命題 2 より  $\lambda_1^{(k)} = 1, \lambda_j^{(k)} < 1, 2 \leq j \leq \bar{n}$  という性質が成り立つ。この時  $(\rho^{(k)} - \rho^*)$  を固有ベクトルの線形和で表す。

$$\rho^{(k)} - \rho^* = c_1^{(k)} v_1^{(k)} + c_2^{(k)} v_2^{(k)} + \dots + c_{\bar{n}}^{(k)} v_{\bar{n}}^{(k)} \tag{67}$$

これを用いると  $(\rho^{(k+1)} - \rho^*)$  に関しても、固有ベクトルの線形和を用いて表すことができる。

$$\begin{aligned}\rho^{(k+1)} - \rho^* &= [M^{(k)} + R]^{-1} R(\rho^{(k)} - \rho^*) \\ &= c_1^{(k)} v_1^{(k)} + c_2^{(k)} \lambda_2^{(k)} v_2^{(k)} + \cdots + c_n^{(k)} \lambda_n^{(k)} v_n^{(k)}.\end{aligned}$$

固有ベクトル  $v_1^{(k)}, v_2^{(k)}, \dots, v_n^{(k)}$  が互いに正規直交である性質を用いると  $(\rho^{(k+1)} - \rho^*)$  の L2 ノルムと  $(\rho^{(k)} - \rho^*)$  の L2 ノルムには以下の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned}\|\rho^{(k+1)} - \rho^*\|_2^2 &= (c_1^{(k)})^2 + (c_2^{(k)})^2 \lambda_2^{(k)} + \cdots + (c_n^{(k)})^2 \lambda_n^{(k)} \\ &< (c_1^{(k)})^2 + (c_2^{(k)})^2 + \cdots + (c_n^{(k)})^2 = \|\rho^{(k)} - \rho^*\|_2^2.\end{aligned}$$

以上が定理 1 の証明となる。  $\square$

この定理より、L2 正則化を導入したデータ駆動型一般化最小分散制御の評価関数より推定されるパラメータは、真値パラメータとの距離を縮小することが分かる。一方で固有値 1 に対応する  $(c_1^{(k)})^2$  は誤差として残ってしまうように見受けられる。しかし更新行列  $[M^{(k)} + R]^{-1} R$  は繰り返し設計により異なるランダムデータより構成されるため、固有値 1 に対応する固有ベクトルも逐次変化する。これにより  $(c_1^{(k)})^2$  は繰り返し設計を行う中で徐々に小さくなっていき、真値に近いパラメータを推定できる。

### 3.5 設計される制御系の安定性解析

前節においては、繰り返し設計により逐次推定されるパラメータが徐々に真値パラメータとの距離を縮小することを証明した。しかし逐次推定されるパラメータより設計される制御器が閉ループ系を安定化することを保証していない。繰り返し設計においては設計した制御系よりデータを取得する必要があるため、設計される制御系が安定であることが重要となる。そのため本節においては、推定されたパラメータを用いて設計される制御器が閉ループ系を安定にすることを証明する。本研究においてはこのことを岡田らの研究 [22] を利用して示す。

岡田らの研究においては、データ駆動の評価関数を用いて推定された制御器パラメータが本来の評価関数を小さくする条件を、DoA(Domain of Attraction) の考え方を利用して示している。ここにおいてはその概要を手短に紹介する。データ駆動の評価関数より推定されるパラメータを  $\rho_d$ 、初期制御器パラメータを  $\rho_0$ 、本来の評価関数を  $J_{MR}(\rho)$  と定義する。この時  $\nabla J_{MR}(\rho)$  は勾配ベクトルを表す、勾配ベクトルは評価関数を最大化する方向を示すベクトルのことである。一方で勾配ベクトルの符号をマイナスにしたもの、すなわち  $-\nabla J_{MR}(\rho)$  は評価関数を最小化する方向を示す。またこの勾配ベクトルと垂直な線上においては評価関数の値は変化しない。このことから、 $(\rho_d - \rho_0)$  と  $-\nabla J_{MR}(\rho^0)$  のなす角度  $\theta$  が  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$  を満たす場合、推定されるパラメータは初期制御器パラメータと比較して本来の評価関数を小さくすると期待できる。このときの条件は内積の関係から

$$(\rho_0 - \rho_d) \nabla J_{MR}(\rho^0) > 0 \quad (68)$$

が成立することが必要となる。

データ駆動型一般化最小分散制御における本来の評価関数は、入出力データから構成される一般化出力の分散であった。このため本来の評価関数が小さくなるということは、入



出力データが発散しておらず閉ループ系が安定であることを示す。このことを踏まえて本研究においては、L2 正則化を導入したデータ駆動型一般化最小分散制御の評価関数より推定されるパラメータ、初期制御器パラメータからなるベクトルと本来の評価関数である一般化出力の分散の勾配ベクトルとの内積がどのような値をとるのかを理論的に考察した。両者の内積が正の値であれば、評価関数より推定される制御器パラメータは本来の評価関数を小さくするパラメータであるため、設計された制御系が安定であるといえる。

まずはじめに一般化出力を白色雑音  $w(t)$  から入力  $u(t)$ 、出力  $y(t)$  への閉ループ伝達関数を用いて記述すると

$$\begin{aligned}\phi(t+k_m) &= P(z^{-1})y(t+k_m) + Q(z^{-1})u(t) \\ &= \frac{PDS(\rho_S)}{AS(\rho_S) + BF(\rho_F)z^{-k_m}}w(t) + \frac{-QDF(\rho_F)}{AS(\rho_S) + BF(\rho_F)z^{-k_m}}w(t) \\ &= \frac{D(PS(\rho_S) - QF(\rho_F))}{AS(\rho_S) + BF(\rho_F)z^{-k_m}}w(t)\end{aligned}\quad (69)$$

となる。ここにおいては理論値で計算を進めていくため、パーセバルの定理を  $\text{Var}[\phi(t+k_m)]$  に適用すると、一般化最小分散制御の評価関数を式 (70) のように書くことができる。

$$J_M(\rho_S, \rho_F) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{D(PS(\rho_S) - QF(\rho_F))}{AS(\rho_S) + BF(\rho_F)z^{-k_m}} \right|^2 d\omega \sigma_w^2 \quad (70)$$

$\text{Var}[\phi^2(t+k_m)]$  は一般化最小分散制御器を実装した時、最小値  $\text{Var}[E^*w(t+k_m)]$  を取る。そのため  $J_M(\rho_S, \rho_F)$  が最小値で 0 をとるようにするべく、 $\text{Var}[E^*w(t+k_m)]$  を  $J_M(\rho_S, \rho_F)$  から引く。ここで先程と同じように  $\text{Var}[E^*w(t+k_m)]$  に関してもパーセバルの定理を適用すると以下のように書くことができる。

$$J_M(\rho_S, \rho_F) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \left| \frac{D(PS(\rho_S) - QF(\rho_F))}{AS(\rho_S) + BF(\rho_F)z^{-k_m}} \right|^2 - |E^*|^2 \right) d\omega \sigma_w^2 \quad (71)$$

ここで次の定理 2 を示す。

**定理 2.**  $V(z)$ ,  $W(z)$  は安定な離散時間システムとする。そして  $W'$  が  $W(z^{-1})$  と定義した時に、 $W'(V - W)$  が厳密にプロパであり、その極がすべて単位円の中にある時、以下の等式が成り立つ。

$$\int_{-\pi}^{\pi} |V(e^{j\omega})|^2 - |W(e^{j\omega})|^2 d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} |V(e^{j\omega}) - W(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (72)$$

定理 2 を用いると式 (71) は以下のように等式変形できる。

$$\begin{aligned}J_M(\rho_S, \rho_F) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{D(PS(\rho_S) - QF(\rho_F))}{AS(\rho_S) + BF(\rho_F)z^{-k_m}} - E^* \right|^2 d\omega \sigma_w^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{D(PS(\rho_S) - QF(\rho_F))}{AS(\rho_S) + BF(\rho_F)z^{-k_m}} - E^* \frac{AS(\rho_S) + BF(\rho_F)z^{-k_m}}{AS(\rho_S) + BF(\rho_F)z^{-k_m}} \right|^2 d\omega \sigma_w^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{S(\rho_S)(PDz^{-k_m} - AE^*) - F(\rho_F)(QDz^{-k_m} + EBz^{-k_m})}{AS(\rho_S) + BF(\rho_F)z^{-k_m}} \right|^2 d\omega \sigma_w^2\end{aligned}$$



$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{(S(\rho_S)F(\rho_F^*) - F(\rho_F)S(\rho_S^*))z^{-k_m}}{AS(\rho_S) + BF(\rho_F)z^{-k_m}} \right|^2 d\omega \sigma_w^2 \quad (73)$$

本研究においては式(73)を本来の評価関数として解析を進める．以下においてはこの評価関数の勾配ベクトル  $\nabla J_M(\rho_S, \rho_F)$  を求めた．ここにおいては，表記のスペースを省略するため  $X(\rho_S, \rho_F)$ ,  $Y(\rho_S, \rho_F)$  を下記のように定義する．

$$Y(\rho_S, \rho_F) = (S(\rho_S)F(\rho_F^*) - F(\rho_F)S(\rho_S^*))z^{-k_m}, \quad X(\rho_S, \rho_F) = AS(\rho_S) + BF(\rho_F)z^{-k_m}.$$

$$\begin{aligned} \nabla J_M(\rho_S, \rho_F) &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{(S(\rho_S)F(\rho_F^*) - F(\rho_F)S(\rho_S^*))z^{-k_m}}{AS(\rho_S) + BF(\rho_F)z^{-k_m}} \right|^2 d\omega \sigma_w^2 \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{Y(\rho_S, \rho_F)}{X(\rho_S, \rho_F)} \right|^2 d\omega \sigma_w^2 \right) \\ &= \frac{\sigma_w^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Re} \left[ \left| \frac{Y(\rho_S, \rho_F)}{X(\rho_S, \rho_F)} \right|^2 \left( \frac{\frac{\partial}{\partial \rho} Y(\rho_S, \rho_F)}{Y(\rho_S, \rho_F)} - \frac{\frac{\partial}{\partial \rho} X(\rho_S, \rho_F)}{X(\rho_S, \rho_F)} \right) \right] d\omega \\ &= \frac{\sigma_w^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Re} \left[ \left| \frac{Y(\rho_S, \rho_F)}{X(\rho_S, \rho_F)} \right|^2 \left( \frac{\left[ \frac{\partial}{\partial \rho_S^T} S(\rho_S)F(\rho_F^*) - \frac{\partial}{\partial \rho_F^T} F(\rho_F)S(\rho_S^*) \right]^T z^{-k_m}}{Y(\rho_S, \rho_F)} - \frac{\left[ \frac{\partial}{\partial \rho_S^T} AS(\rho_S) - \frac{\partial}{\partial \rho_F^T} BF(\rho_F)z^{-k_m} \right]^T}{X(\rho_S, \rho_F)} \right) \right] d\omega \\ &= \frac{\sigma_w^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Re} \left[ \left| \frac{Y(\rho_S, \rho_F)}{X(\rho_S, \rho_F)} \right|^2 \left( \frac{\left[ \beta_S^T F(\rho_F^*) - \beta_F^T S(\rho_S^*) \right]^T z^{-k_m}}{Y(\rho_S, \rho_F)} - \frac{\left[ \beta_S^T A - \beta_F^T B z^{-k_m} \right]^T}{X(\rho_S, \rho_F)} \right) \right] d\omega \\ &= \frac{\sigma_w^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Re} \left[ \left| \frac{Y(\rho_S, \rho_F)}{X(\rho_S, \rho_F)} \right|^2 \left( \frac{\left[ \beta_S^T F(\rho_F^*) - \beta_F^T S(\rho_S^*) \right]^T z^{-k_m} X(\rho_S, \rho_F) - \left[ \beta_S^T A - \beta_F^T B z^{-k_m} \right]^T Y(\rho_S, \rho_F)}{Y(\rho_S, \rho_F) X(\rho_S, \rho_F)} \right) \right] d\omega \\ &= \frac{\sigma_w^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Re} \left[ \frac{\overline{|Y(\rho_S, \rho_F)|}}{|X(\rho_S, \rho_F)|^2} \left( \frac{\left[ \beta_S^T X(\rho_S^*, \rho_F^*) z^{-k_m} F(\rho_F) - \beta_F^T X(\rho_S^*, \rho_F^*) S(\rho_S) \right]^T}{X(\rho_S, \rho_F)} \right) \right] d\omega \\ &= \frac{\sigma_w^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Re} \left[ \frac{\overline{|Y(\rho_S, \rho_F)|}}{|X(\rho_S, \rho_F)|^2} \left( \frac{\left[ \beta_S^T z^{-k_m} F(\rho_F) - \beta_F^T S(\rho_S) \right]^T X(\rho_S^*, \rho_F^*)}{X(\rho_S, \rho_F)} \right) \right] d\omega \end{aligned}$$

ここで求めるのは初期制御器パラメータ  $\rho^{(0)}$  における勾配ベクトルのため，それぞれパラメータを代入し  $\nabla J_M(\rho_S^{(0)}, \rho_F^{(0)})$  を求めると

$$\begin{aligned} \nabla J_M(\rho_S^{(0)}, \rho_F^{(0)}) &= \\ \frac{\sigma_w^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Re} \left[ \frac{\overline{|Y(\rho_S^{(0)}, \rho_F^{(0)})|}}{|X(\rho_S^{(0)}, \rho_F^{(0)})|^2} \left( \frac{\left[ \beta_S^T z^{-k_m} F(\rho_F^{(0)}) - \beta_F^T S(\rho_S^{(0)}) \right]^T X(\rho_S^*, \rho_F^*)}{X(\rho_S^{(0)}, \rho_F^{(0)})} \right) \right] d\omega \quad (74) \end{aligned}$$

となる．このようにして求められた勾配ベクトル  $\nabla J_M(\rho_S^{(0)}, \rho_F^{(0)})$  と  $\rho_d, \rho^{(0)}$  を用いて DoA が成立しているか計算する．またここにおいては  $\rho_d$  を L2 正則化を導入したデータ駆動型一般化最小分散制御の評価関数より推定されるパラメータ  $\rho^{(1)}$ , また  $\rho_0$  を閉ループ系を安定化している初期制御器パラメータ  $\rho^{(0)}$  とする．そして

$$(\rho^{(0)} - \rho^{(1)})\nabla J_M(\rho_S, \rho_F) > 0 \quad (75)$$

が成り立つとき、 $\rho^{(1)}$  は本来の評価関数  $\text{Var}[\phi(t+k_m)]$  を小さくする．本アプローチの課題としては勾配ベクトルを計算する際にプラントモデルが必要となることである．そのため本研究の仮定においては、制御器調整を行う際に推定されたパラメータが制御系を安定にするという保証をすることができない．従って今後の研究においては、プラントモデルを利用することなく DoA を計算できるようにする必要がある．数値例においては制御性能を改善する制御器パラメータと悪化させる制御器パラメータについて、それぞれ式 (75) を実際に計算し、DoA が成立しているかどうかを確認する．さらには使用した制御器パラメータを制御系に実装した際の制御性能についても調べ、実際にこの安定化判別法が機能しているのか確認する．

## 4 設計性能向上を目指した挑戦

本研究においては、ここまでデータ駆動型一般化最小分散制御の特徴と評価関数の最適解の一意性が保証されていないという課題を示し、課題の解決を目的とした手法を提案した。提案手法においては、評価関数にL2正則化を導入することで課題の解決を目指し、さらに繰り返し設計を導入することで、一般化最小分散制御器を構成する制御器パラメータの獲得も可能とした。また理論解析を行い、推定されるパラメータが繰り返し設計により、真値パラメータとの距離を逐次縮小すること、逐次推定されるパラメータを用いて、設計される制御系が安定となる際に成立する条件について示した。本章においては提案手法のさらなる改善を目指し、新たなアプローチを提案手法に導入した研究について紹介する。

### 4.1 繰り返し設計回数の削減を目的とした正則化項のオフライン設計

提案手法においては、繰り返し設計により逐次評価関数を更新することで、一般化最小分散制御器を構成する制御器パラメータの獲得を可能としている。一方で導入した繰り返し設計によって、逐次制御系を設計するためにデータを繰り返し取得する必要がある。実際に現場に応用することになると、調整作業に負担をかけないためにも制御系の設計回数やデータの取得回数は少ない方が望ましい。そのために本節において提案するアプローチが正則化項のオフライン設計である。提案手法においては、閉ループ系から取得される操業データを用いて構築した評価関数  $J_{dL}(\rho^{(1)})$  より推定されたパラメータ  $\rho^{(1)}$  と、そのパラメータを用いて設計された制御系より取得される閉ループデータを用いて評価関数を以下のように更新していた。

$$J_{dL}(\rho^{(2)}) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left( \phi_0^{(1)}(t + k_m) - \xi_{uy}^{(1)T} \rho^{(2)} \right)^2 + (\rho^{(2)} - \rho^{(1)})^T R (\rho^{(2)} - \rho^{(1)})$$

前節においては  $\|\rho^{(k+1)} - \rho^*\|_2^2 < \|\rho^{(k)} - \rho^*\|_2^2$  が成り立つことを証明している。すなわち  $\|\rho^{(1)} - \rho^*\|_2^2 < \|\rho^{(0)} - \rho^*\|_2^2$  が成り立つため、正則化項の基準点を  $\rho^{(0)}$  から  $\rho^{(1)}$  とすることで、正則化項の影響が弱まりより真値に近いパラメータを推定することが可能となる。一方で誤差二乗和は初期の操業データ  $u_0^{(0)}(t), y_0^{(0)}(t)$  を用いて構成された際にも  $\rho^*$  において最小値を取った。そのためこちらはデータを更新する必要がないようにみえる。誤差二乗和を更新しない場合、評価関数の更新はオフラインで行うことが可能となる。すなわち制御器パラメータを推定する際のデータの取得回数が1回で済むこととなる。この場合の評価関数は以下のように書くことができる。

$$J_{dL}(\rho^{(i+1)}) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left( \phi_0^{(0)}(t + k_m) - \xi_{uy}^{(0)T} \rho^{(i+1)} \right)^2 + (\rho^{(i+1)} - \rho^{(i)})^T R (\rho^{(i+1)} - \rho^{(i)}) \quad (76)$$

続けて、前節と同じように解析を進めていくために、式(76)を  $\rho^{(i+1)}$  に関して最小二乗法で解くと

$$\begin{aligned} \rho^{(i+1)} &= \left( \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \xi_{uy}^{(0)} \xi_{uy}^{(0)T} + R \right)^{-1} \left( \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \xi_{uy}^{(i)} \phi_0^{(0)}(t + k_m) + R \rho^{(i)} \right) \\ &= \left( M^{(0)} + R \right)^{-1} \left( \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \xi_{uy}^{(0)} \phi_0^{(0)}(t + k_m) + R \rho^{(i)} \right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \left(M^{(0)} + R\right)^{-1} \left( \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \xi_{uy}^{(0)} \xi_{uy}^{(0)T} \rho^* + \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \xi_{uy}^{(0)} E^* w_0^{(0)}(t + k_m) + R \rho^{(i)} \right) \\
&= \left(M^{(0)} + R\right)^{-1} \left( M^{(0)} \rho^* + \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \xi_{uy}^{(0)} E^* w_0^{(0)}(t + k_m) + R \rho^{(i)} \right) \quad (77)
\end{aligned}$$

となる．ここで白色雑音の平均が0となる性質から， $\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \xi_{uy}^{(0)} E^* w_0^{(0)}(t + k_m)$  はデータ数  $N \rightarrow \infty$  とした時0となる．これによりデータ数が非常に多いという理想状態において，式(77)は

$$\begin{aligned}
\rho^{(i+1)} &= \left(M^{(0)} + R\right)^{-1} \left( M^{(0)} \rho^* + R \rho^{(i)} \right) \\
&= \rho^* + \left(M^{(0)} + R\right)^{-1} R (\rho^{(i)} - \rho^*) \quad (78)
\end{aligned}$$

と展開することができる．さらに  $\rho^*$  を左辺に移行すると

$$\rho^{(i+1)} - \rho^* = \left(M^{(0)} + R\right)^{-1} R (\rho^{(i)} - \rho^*)$$

となる．また前章と同じように  $\rho^{(i+1)}$  と  $\rho^{(i)}$  の間に漸化式の関係が成立することを用いると

$$\begin{aligned}
\rho^{(i+1)} - \rho^* &= \left(M^{(0)} + R\right)^{-1} R \left(M^{(0)} + R\right)^{-1} R (\rho^{(i-1)} - \rho^*) \\
&= \prod_{k=0}^i \left\{ \left(M^{(0)} + R\right)^{-1} R \right\} (\rho^{(0)} - \rho^*) \quad (79)
\end{aligned}$$

となる．前章と違うのは， $\rho^{(i+1)} - \rho^*$  は  $\rho^{(0)} - \rho^*$  を  $(M^{(0)} + R)^{-1} R$  を  $i+1$  乗したものに作用させていることである．そのため本節においては，更新行列  $\prod_{k=0}^i \left\{ (M^{(0)} + R)^{-1} R \right\}$  を解析する．前章と同じように，更新行列  $(M^{(k)} + R)^{-1} R$  の正規直交化された固有ベクトルを  $v_1^{(k)}, v_2^{(k)}, \dots, v_n^{(k)}$ ，対応する固有値を  $\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, \dots, \lambda_n^{(k)}$  とする．この時  $(\rho^{(0)} - \rho^*)$  を固有ベクトルの線形和で表すと

$$\rho^{(0)} - \rho^* = c_1^{(0)} v_1^{(0)} + c_2^{(0)} v_2^{(0)} + \dots + c_n^{(0)} v_n^{(0)} \quad (80)$$

となる．これを用いると  $(\rho^{(i+1)} - \rho^*)$  に関しても，固有ベクトルの線形和を用いて表すことができる．

$$\begin{aligned}
\rho^{(i+1)} - \rho^* &= \prod_{k=0}^i \left\{ \left(M^{(0)} + R\right)^{-1} R \right\} (\rho^{(0)} - \rho^*) \\
&= c_1^{(0)} v_1^{(0)} + c_2^{(0)} (\lambda_2^{(0)})^{i+1} v_2^{(0)} + \dots + c_n^{(0)} (\lambda_n^{(0)})^{i+1} v_n^{(0)} \quad (81)
\end{aligned}$$

上記を見ると  $c_1^{(0)} v_1^{(0)}$  が確実に誤差として残ってしまうことが分かる．これは更新行列が変化しないため固有ベクトルも変化せず，繰り返し設計の中で式(81)の第二項以降しか小さくなっていかないためと考えられる．一方で第二項以降の誤差は解消できることため，同じデータセットを用いた場合においても，3章で提案した手法より真値に近い制御器パラメータを獲得できる．そのため，データの取得回数を削減したいという目標は達成できたと考えられる．本提案の有効性は次章の数値例にて確認する．



## 4.2 最適な正則化行列の設計

前節においては、少ない繰り返し設計回数にて真値パラメータを獲得すること、及び一回のデータ取得でより精度の高い制御器パラメータを獲得することを目的として、正則化項のオフライン設計を提案した。それに対して本節においては、正則化行列を適切に設計することで一回のデータ取得で精度の高い制御器パラメータを獲得することを目的とする。ここで正則化行列  $R = \gamma I$  は誤差二乗和とパラメータの基準点からの偏差に対して評価関数上で重み付けをする役割を果たしている。 $\gamma = 0$  とした場合、評価関数は誤差二乗和となり評価関数は真値で最小値を取ることが分かる。これは従来のデータ駆動型一般化最小分散制御の評価関数と一致している。一方で  $\gamma$  を大きくした場合、推定されるパラメータの基準点との偏差に対して大きなペナルティを評価関数上で与えることになり、基準点に非常に近いパラメータが推定されやすくなる。このため最適解の一意性を保証しつつ、正則化項の影響を強くしない正則化行列を設計することができれば、一般化最小分散制御に近い性能を持つ制御器パラメータを推定できると考えられる。そのような正則化行列を求める手法はこれまでに多く提案されてきたが、今回は総平均二乗誤差 (Total Mean Square Error) を基準として正則化行列を求める [23]。推定されるパラメータを  $\hat{\rho}$ 、真値パラメータを  $\rho^*$  とすると総平均二乗誤差は以下のように与えられる。

$$\text{TMSE}(\hat{\rho}) = E[(\hat{\rho} - \rho^*)^T (\hat{\rho} - \rho^*)] \quad (82)$$

標準偏差においては平均値からのばらつきを数値化していたが、総平均二乗誤差においては真値からのばらつきを数値化している。この値が小さくなれば推定毎のパラメータの真値からのばらつきが小さくなっている状態であるため、制御性能を改善する制御器パラメータを安定して獲得できると期待される。データ駆動型一般化最小分散制御に L2 正則化を導入した提案手法より推定されるパラメータは、正則化行列  $R = \gamma I$  に依存している。そのため  $\gamma$  のなかで、総平均二乗誤差を最小化する  $\gamma$  を探索することで、望ましい制御器パラメータを導出する評価関数を構築できる。ここで  $\hat{\rho} = \rho^{(1)}$  とし、以下においては提案手法における総平均二乗誤差の導出過程を示す。はじめに式 (82) に  $-E[\rho^{(1)}] + E[\rho^{(1)}]$  を代入すると

$$\begin{aligned} \text{TMSE}(\rho^{(1)}) &= E[(\rho^{(1)} - E[\rho^{(1)}] + E[\rho^{(1)}] - \rho^*)^T (\rho^{(1)} - E[\rho^{(1)}] + E[\rho^{(1)}] - \rho^*)] \\ &= E[(\rho^{(1)} - E[\rho^{(1)}])^T (\rho^{(1)} - E[\rho^{(1)}])] \\ &\quad + 2E[(\rho^{(1)} - E[\rho^{(1)}])^T (E[\rho^{(1)}] - \rho^*)] + E[(E[\rho^{(1)}] - \rho^*)^T (E[\rho^{(1)}] - \rho^*)] \quad (83) \\ &= \text{trace}E[(\rho^{(1)} - E[\rho^{(1)}])(\rho^{(1)} - E[\rho^{(1)}])^T] + (E[\rho^{(1)}] - \rho^*)^T (E[\rho^{(1)}] - \rho^*) \quad (84) \end{aligned}$$

となり、推定毎の推定値のばらつきと、推定値の平均値の真値からの偏りを評価するものであることが分かる。期待値をとると  $2E[(\rho^{(1)} - E[\rho^{(1)}])^T (E[\rho^{(1)}] - \rho^*)] = 0$  となるため、式 (83) から式 (84) のように書き換えることができる。また  $\rho^{(1)}$ ,  $E[\rho^{(1)}]$  はそれぞれ以下のように表すことができる。

$$\rho^{(1)} = (M^{(0)} + R)^{-1} \left( M^{(0)} \rho^* + R \rho^{(0)} + \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \xi_{uy}^{(0)} E^* w_0^{(0)}(t + k_m) \right) \quad (85)$$

$$\begin{aligned} E[\rho^{(1)}] &= (M^{(0)} + R)^{-1} (M^{(0)} \rho^* + R \rho^{(0)}) \\ &= \rho^* + (M^{(0)} + R)^{-1} R (\rho^{(0)} - \rho^*) \quad (86) \end{aligned}$$

続いては、 $\rho^{(1)}$ ,  $E[\rho^{(1)}]$  を式 (84) に代入し、総平均二乗誤差を評価基準とした際に最適な正則化項を構築する正則化行列  $R = \gamma I$  を求める。まずは総平均二乗誤差を計算するべく、 $E[(\rho^{(1)} - E[\rho^{(1)}])(\rho^{(1)} - E[\rho^{(1)}])^T]$ ,  $(E[\rho^{(1)}] - \rho^*)^T(E[\rho^{(1)}] - \rho^*)$  をそれぞれ計算する。

$$\begin{aligned}
& E[(\rho^{(1)} - E[\rho^{(1)}])(\rho^{(1)} - E[\rho^{(1)}])^T] = \\
& E \left[ \left( M^{(0)} + \gamma I \right)^{-1} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \xi_{uy}^{(0)} E^* w_0^{(0)}(t + k_m) \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \xi_{uy}^{(0)T} E^* w_0^{(0)}(t + k_m) \left( M^{(0)} + \gamma I \right)^{-1} \right] \\
& = \|E^*\|_2^2 \sigma_w^2 \left[ \left( M^{(0)} + \gamma I \right)^{-1} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \xi_{uy}^{(0)} \xi_{uy}^{(0)T} \left( M^{(0)} + \gamma I \right)^{-1} \right] \\
& = \|E^*\|_2^2 \sigma_w^2 \left[ \left( M^{(0)} + \gamma I \right)^{-1} M^{(0)} \left( M^{(0)} + \gamma I \right)^{-1} \right] \tag{87}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (E[\rho^{(1)}] - \rho^*)^T (E[\rho^{(1)}] - \rho^*) \\
& = (\rho^{(0)} - \rho^{(*)})^T \gamma I \left( M^{(0)} + \gamma I \right)^{-1} \left( M^{(0)} + \gamma I \right)^{-1} \gamma I (\rho^{(0)} - \rho^{(*)}) \tag{88}
\end{aligned}$$

ここで、 $\lambda_1^{(0)} \geq \lambda_2^{(0)}, \dots, \geq \lambda_{\bar{n}}^{(0)} (> 0)$  は、行列  $M^{(0)}$  の固有値であり、この固有値を最大固有値から順に対角に並べた行列を

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_{\bar{n}}^{(0)})$$

とし、 $\Gamma$  を行列  $M^{(0)}$  を対角化する  $\bar{n}$  次の直交行列 ( $\Gamma^T \Gamma = \Gamma \Gamma^T = I$ ) とすると

$$M^{(0)} = \Gamma \Lambda \Gamma^T \quad ; \text{スペクトル分解} \tag{89}$$

が成り立つ。式 (89) を式 (87), 式 (88) にそれぞれ代入すると

$$\begin{aligned}
& \|E^*\|_2^2 \sigma_w^2 \left[ \left( M^{(0)} + \gamma I \right)^{-1} M^{(0)} \left( M^{(0)} + \gamma I \right)^{-1} \right] \\
& = \|E^*\|_2^2 \sigma_w^2 \left[ \left( \Gamma \Lambda \Gamma^T + \gamma I \right)^{-1} \Gamma \Lambda \Gamma^T \left( \Gamma \Lambda \Gamma^T + \gamma I \right)^{-1} \right] \\
& = \|E^*\|_2^2 \sigma_w^2 \left[ \left( \Gamma \Lambda \Gamma^T + \Gamma \gamma I \Gamma^T \right)^{-1} \Gamma \Lambda \Gamma^T \left( \Gamma \Lambda \Gamma^T + \Gamma \gamma I \Gamma^T \right)^{-1} \right] \\
& = \|E^*\|_2^2 \sigma_w^2 \left[ \Gamma (\Lambda + \gamma I)^{-1} \Gamma^T \Gamma \Lambda \Gamma^T \Gamma (\Lambda + \gamma I)^{-1} \Gamma^T \right] \\
& = \|E^*\|_2^2 \sigma_w^2 \left[ \Gamma (\Lambda + \gamma I)^{-1} \Lambda (\Lambda + \gamma I)^{-1} \Gamma^T \right] \tag{90}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\rho^{(0)} - \rho^{(*)})^T \gamma I \left( M^{(0)} + \gamma I \right)^{-1} \left( M^{(0)} + \gamma I \right)^{-1} \gamma I (\rho^{(0)} - \rho^{(*)}) \\
& = (\rho^{(0)} - \rho^{(*)})^T \gamma I \left( \Gamma \Lambda \Gamma^T + \gamma I \right)^{-1} \left( \Gamma \Lambda \Gamma^T + \gamma I \right)^{-1} \gamma I (\rho^{(0)} - \rho^{(*)}) \\
& = (\rho^{(0)} - \rho^{(*)})^T \gamma I \left( \Gamma \Lambda \Gamma^T + \Gamma \gamma I \Gamma^T \right)^{-1} \left( \Gamma \Lambda \Gamma^T + \Gamma \gamma I \Gamma^T \right)^{-1} \gamma I (\rho^{(0)} - \rho^{(*)}) \\
& = (\rho^{(0)} - \rho^{(*)})^T \gamma I \Gamma \Gamma^T (\Lambda + \gamma I)^{-1} \Gamma \Gamma^T (\Lambda + \gamma I)^{-1} \Gamma \gamma I (\rho^{(0)} - \rho^{(*)}) \\
& = (\Gamma (\rho^{(0)} - \rho^{(*)}))^T \gamma I (\Lambda + \gamma I)^{-1} (\Lambda + \gamma I)^{-1} \gamma I \Gamma (\rho^{(0)} - \rho^{(*)}) \\
& = \alpha^T \gamma I (\Lambda + \gamma I)^{-1} (\Lambda + \gamma I)^{-1} \gamma I \alpha \quad ; \alpha = \Gamma (\rho^{(0)} - \rho^{(*)}) \tag{91}
\end{aligned}$$

となる．式展開によって獲得された式 (90)，式 (91) を用いて，式 (84) で記述される総平均二乗誤差を計算していく．

$$\begin{aligned}
\text{TMSE}(\rho^{(1)}) &= \text{trace}[(\rho^{(1)} - E[\rho^{(1)}])(\rho^{(1)} - E[\rho^{(1)}])^T] + (E[\rho^{(1)}] - \rho^*)^T(E[\rho^{(1)}] - \rho^*) \\
&= \text{trace} \left[ \|E^*\|_2^2 \sigma_w^2 \left[ \Gamma (\Lambda + \gamma I)^{-1} \Lambda (\Lambda + \gamma I)^{-1} \Gamma^T \right] \right] \\
&\quad + \alpha^T \gamma I (\Lambda + \gamma I)^{-1} (\Lambda + \gamma I)^{-1} \gamma I \alpha \\
&= \|E^*\|_2^2 \sigma_w^2 \text{trace} \left[ (\Lambda + \gamma I)^{-1} \Lambda (\Lambda + \gamma I)^{-1} \Gamma^T \Gamma \right] \\
&\quad + \alpha^T \gamma I (\Lambda + \gamma I)^{-1} (\Lambda + \gamma I)^{-1} \gamma I \alpha \\
&= \|E^*\|_2^2 \sigma_w^2 \sum_{c=1}^{\bar{n}} \frac{\lambda_c}{(\lambda_c + \gamma)^2} + \sum_{c=1}^{\bar{n}} \frac{\alpha_c^2 \gamma^2}{(\lambda_c + \gamma)^2} \tag{92}
\end{aligned}$$

式 (92) をみると， $\rho^{(1)}$  の総平均二乗誤差は行列  $M^{(0)}$  の固有値と正則化行列の大きさを決める  $\gamma$  で構成されることが分かる．しかし式 (92) の第二項における  $\alpha$  には真値  $\rho^*$  の情報が含まれているが，真値パラメータを獲得することを目的としている本研究においては， $\rho^*$  は未知パラメータである．そのため最適化計算により  $\gamma$  を求める際には， $\alpha$  を推定することが必要となるが，本研究においては  $\rho^* = 0$  としたものを用いる．これは推定値の真値に対する偏り評価する第二項が，ある程度の大きさと評価関数上でなるようにするためである．また最小分散値  $\|E^*\|_2^2 \sigma_w^2$  の情報も必要となるが，こちらは従来のデータ駆動型一般化最小分散制御の評価関数である式 (20) の最小値と一致することがわかっているため，評価関数の最小値を用いる．本提案の有効性は次章の数値例にて確認する．



## 5 数値例

本章においては、数値例を通してデータ駆動型一般化最小分散制御に L2 正則化を導入した提案手法の有効性を確認する。5.1 節においては、数値シミュレーションで用いる制御対象や基本設定について示し、5.2 節においては、正則化を導入したことにより推定されるパラメータのばらつきが抑制されたことを確認するべく、提案手法と従来法より得られる推定毎の閉ループ系のボード線図とパラメータの値と比較する。続いて 5.3 節においては、繰り返し設計により推定されるパラメータが真値に収束するかどうかを確認をする。5.4 節においては、提案手法において DoA が成立しているかを確認し、成立している場合には制御性能が改善しているかを確認する。そして 5.5 節においては正則化項をオフライン設計して獲得されたパラメータの特徴について示し、5.6 節においては、4.2 節で示したアプローチにより設計した最適な正則化行列を用いて推定を行った場合のパラメータについて、適当に正則化行列を選んだ場合と制御性能を比較する。

### 5.1 基本設定

制御対象とするシステムは、2.1 節でも示した線形離散時間モデルである CARMA モデルを考える。またその中でも化学プラントで多く見られる一次遅れ+むだ時間の性質を持つモデルを、数値シミュレーションにおいては使用する。ここにおいては制御対象の特性が経時変動することで、以前に設計された制御器との相性が悪くなっている状況を想定する。このような制御器のパラメータを、提案手法により推定された制御器パラメータを用いて調整することで、制御性能を再び一般化最小分散評価において、理想的な状態とすることを目的としている。続いて数値シミュレーションにおいて用いる CARMA モデルを示す。

< 制御対象 1 >

$$A = 1 - 0.7358z^{-1} + 0.1353z^{-2}$$

$$B = 0.2642 + 0.1353z^{-1}$$

$$D = 1 - 0.9000z^{-1}$$

また制御対象 1 が特性変動する前の制御対象のことを、ここにおいてはノミナルモデル 1 と呼び、それは以下で示される。

< ノミナルモデル 1 >

$$A_0 = 1 - 1.7340z^{-1} + 0.7515z^{-2}$$

$$B_0 = 0.1485 + 0.1350z^{-1}$$

$$D_0 = 1 - 0.9000z^{-1}$$

一般化出力の設計多項式を  $P = 1$ ,  $Q = 0.3$  で与えると、ノミナルモデルにおける一般化最小分散制御器を以下のように与えることができる。この制御器は制御対象 1 においても閉ループ系を安定化するが、一般化最小分散制御は実現できていない。

< 初期制御器パラメータ 1 >

$$C_0(\rho_S, \rho_F) = \frac{0.6947 - 0.6268z^{-1}}{0.4485 - 0.0112z^{-1} + 0.1126z^{-2}} \quad (93)$$



また CARMA モデルの次数は,  $n_a = 2, n_b = 1, n_d = 1$  であるとする. またむだ時間  $k_m = 2$ , 白色雑音の分散は  $\sigma_w^2 = 1$ , データを取得するサンプリング間隔は 1[sec] とする. そしてデータ駆動型一般化最小分散制御の評価関数の最適化はすべて最小二乗法を用いて行うものとする.

## 5.2 正則化の推定に与える影響

本節においては, データ駆動型一般化最小分散制御に L2 正則化を導入した有効性を示すべく, 提案手法と従来手法, それぞれより推定毎に設計される制御系のボード線図, 同じく推定毎のパラメータのばらつきについて調べる. ここで従来手法とは式 (20) を評価関数とする, オリジナルのデータ駆動型一般化最小分散制御のことを示す. またボード線図用いて周波数特性を表すのは感度関数とする. ボード線図は周波数応答の可視化ツールとしてよく使われる方法であり, 横軸が入力信号の周波数, 縦軸が出力信号と入力信号の振れ幅比と位相遅れを表している. 感度関数は外乱から出力への閉ループ伝達関数であり, これが望ましい値となることは外乱抑制性能の向上を目的とする上で, 非常に大切なことと考えられるからである. 本シミュレーションにおいては, 制御対象 1 を制御対象として使用し, 制御器パラメータ推定に用いるデータは  $N = 1000$ , データの取得回数は 1 回とする. また正則化行列は  $R = \gamma I_5 (\gamma = 0.01, 0.1, 1, 10, 100)$  を用いる. そしてシミュレーションを繰り返し 100 回行い推定毎に設計される制御系がどのくらいばらついているのかを調べる. はじめに推定されるパラメータのばらつきについて示す. このときパラメータのばらつきを推定毎に獲得される各パラメータの標準偏差を基準として評価する.

表 1: 推定されるパラメータのばらつき

	$\rho_{S(0)}$	$\rho_{S(1)}$	$\rho_{S(2)}$	$\rho_{F(0)}$	$\rho_{F(1)}$
$\gamma = 0$	5.3996	0.5006	2.1310	8.1466	7.8100
$\gamma = 0.01$	0.0167	0.0146	0.0212	0.0165	0.0212
$\gamma = 0.1$	0.0147	0.0134	0.0192	0.0146	0.0189
$\gamma = 1$	0.0111	0.0099	0.0120	0.0076	0.0096
$\gamma = 10$	0.0117	0.0065	0.0110	0.0037	0.0034
$\gamma = 100$	0.0061	0.0013	0.0059	0.0014	0.0018

ここで  $\gamma = 0$  とした場合は従来手法に対応していることに注意する. 表 1 をみると  $\gamma = 0$  のとき, すなわち従来手法より推定されるパラメータには大きなばらつきが生じていることがわかる. これは 2 章でも証明した通り,  $\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \xi_{uy} \xi_{uy}^T$  が特異行列となるため, 逆行列が存在せず最小二乗法を安定して解くことができないためである. 一方で  $\gamma = 0.01$  以降においては, 特異行列が正則化行列により逆行列をもつようになるため, 最小二乗法を安定して解くことができるようになり, 推定されるパラメータのばらつきも大幅に小さくなっている. 続いて, 設計される制御系のボード線図について結果を示す. 図 6 は従来手法により設計された制御系のボード線図である. ここにおいては緑線が推定毎に設計された制御系, 青線が制御対象 1 に対応する一般化最小分散制御器を実装した制御系のボード線図をそれぞれ表す. 図 6 をみると, やはり推定毎に設計される制御系の性質に, ばらつきが出てしまっていることがゲイン線図, 位相線図からみてとれる. 一方で図 7, 図 8, 図 9 を

みると、設計される制御系のばらつきが非常に小さくなっていることが分かる。またその中でも  $\gamma$  を大きくするほど、ばらつきは小さくなっているが一般化最小分散制御器を実装した制御系のボード線図とな偏りが大きくなっていることが分かる。これは  $\gamma$  の値が大きくなると、推定されるパラメータの基準点からの偏差に対して評価関数上で大きなペナルティが与えられるようになり、初期制御器パラメータに非常に近いパラメータが推定されるようになるためである。

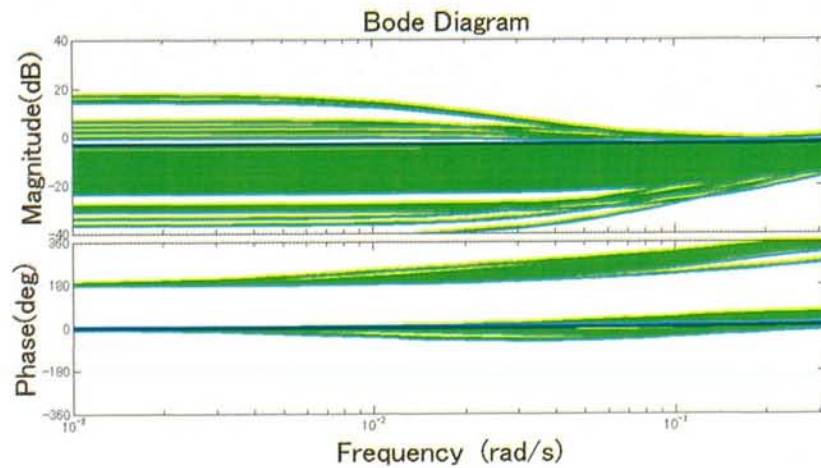


図 6: 従来手法より設計される感度関数のボード線図

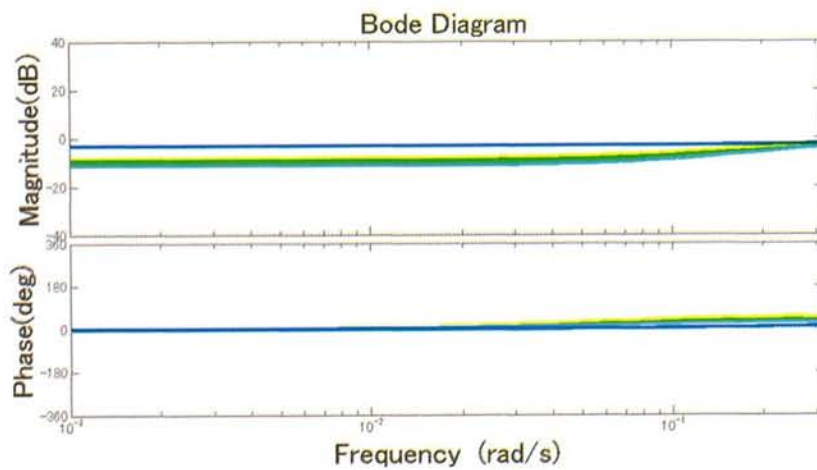


図 7: 提案手法において  $\gamma = 0.01$  とした際のボード線図

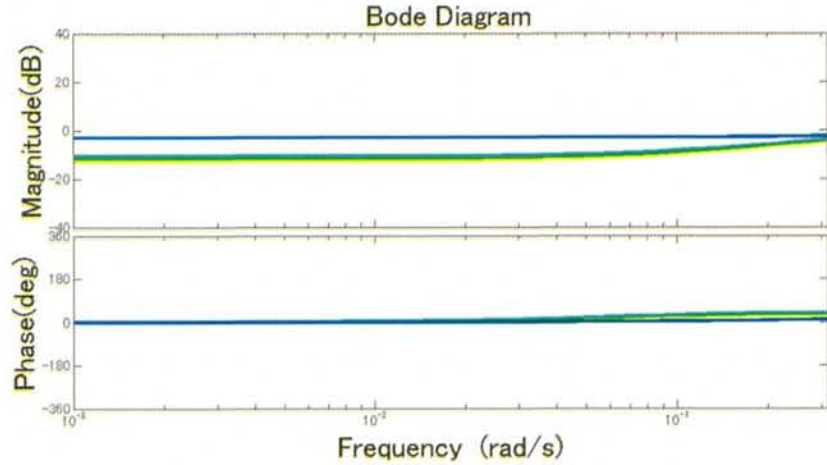


図 8: 提案手法において  $\gamma = 1$  とした際のボード線図

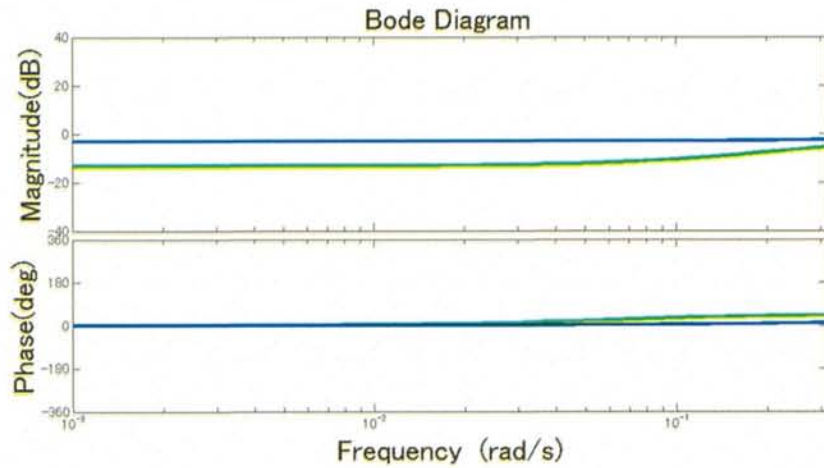


図 9: 提案手法において  $\gamma = 100$  とした際のボード線図

### 5.3 繰り返し設計による効果の評価

本節においては、繰り返し設計により評価関数を逐次更新することで、データの取得を 1 回とした時と比較して良好な制御性能を発揮する制御器パラメータを推定できることを示す。そのために、推定されるパラメータと真値との距離の推移、更新行列の固有値の推移、そして逐次設計される制御系の一般化出力、入力、出力の分散について調べる。ここで推定されるパラメータと真値との距離の推移は両ベクトルの差を L2 ノルムで評価する。本シミュレーションにおいては制御対象 1 を制御対象として使用し、制御器パラメータ推定に用いるデータは  $N = 500000$ 、データの取得回数は 1000 回とする。また正則化行列は  $R = \gamma I_5$  ( $\gamma = 0.01, 1, 100$ ) を用いる。前節と比較してデータ数を大幅に増やしたのは、デー

タセットごとのばらつきを小さくし、理論値に近い状態でパラメータ推定を行うためである。また3.4節にて証明した定理においても、理論値で計算を行っているため、定理が正しいことを実際に示すためにもデータ数を前節と比較して大幅に増やした。またデータの取得回数が1000回というのは、3.3節においても示したデータの取得と制御系の設計を反復する繰り返し設計を、1000回行っていることを示している。

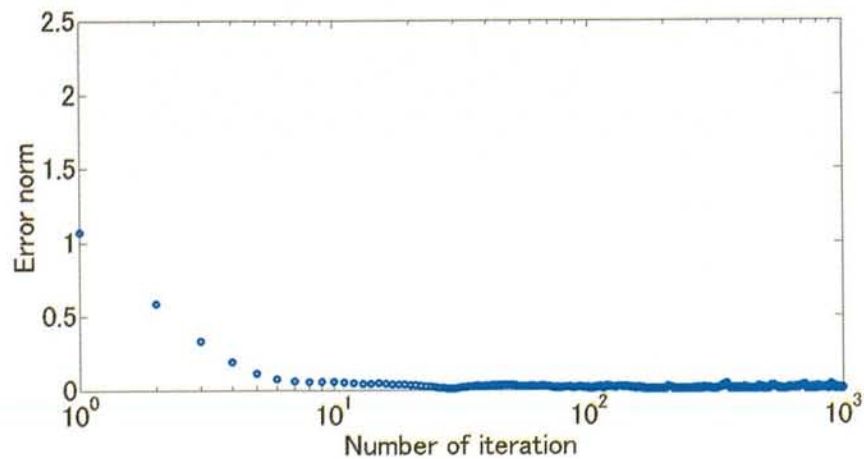


図 10:  $\gamma = 0.01$  とした際の推定されるパラメータと真値との距離の推移

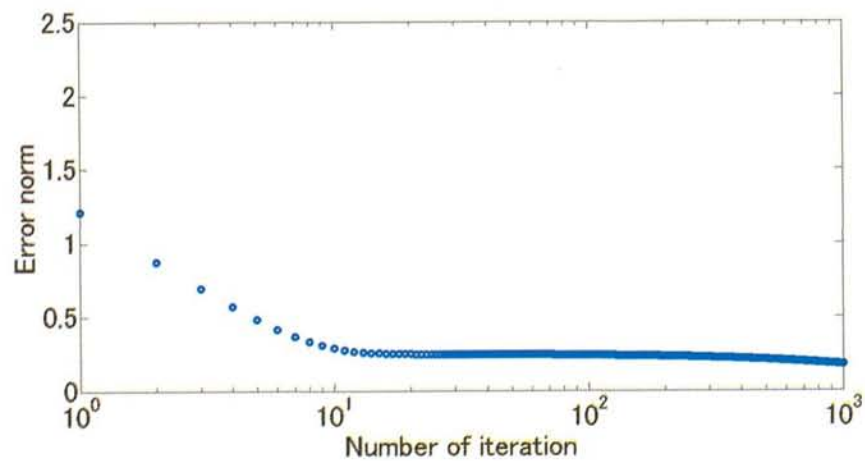


図 11:  $\gamma = 1$  とした際の推定されるパラメータと真値との距離の推移



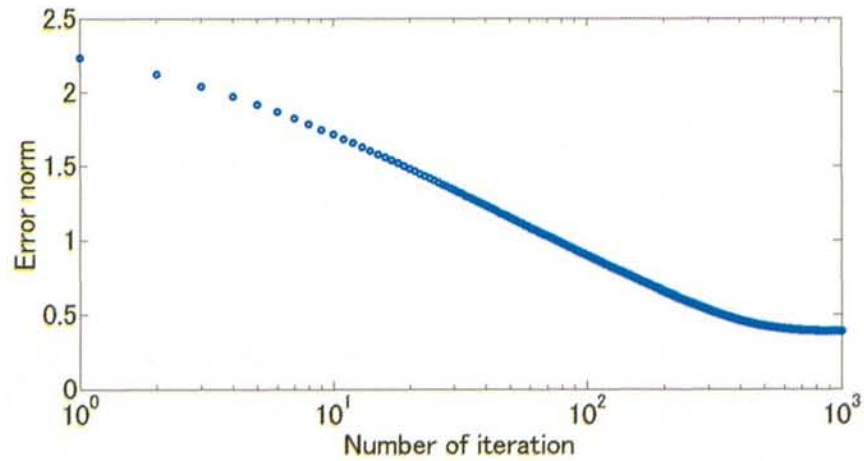


図 12:  $\gamma = 100$  とした際の推定されるパラメータと真値との距離の推移

まず初めに推定されるパラメータの真値との距離の推移について調べる．図 10, 図 11, 図 12 は, それぞれ正則化行列を  $\gamma = 0.01, 1, 100$  としたときに逐次評価関数より推定されるパラメータと真値との距離を図にプロットしたものである．これをみると繰り返し設計によって, 評価関数より推定されるパラメータが, 真値との距離を縮小していることがみてとれる．ここで初期パラメータと真値との距離の L2 ノルムは,  $\gamma = 0.01, 1, 100$  の時すべて同じく 2.4989 であり, 正則化行列により収束速度にも変化がでていることがみてとれる．これは正則化行列の値が大きいと基準点からの距離に対して評価関数上でペナルティが大きくなるため, 基準点の周辺にパラメータが推定されることによる．また  $\gamma = 1, 100$  の際には推定されるパラメータは真値に収束しておらず, さらに繰り返し設計の回数を増やしても収束することはなかった．これより, 推定されるパラメータを用いて正則化項を更新するだけにおいては不十分で, 正則化行列の大きさを決める  $\gamma$  の値自体を逐次小さくすることが真値パラメータの獲得には必要であることが分かった．

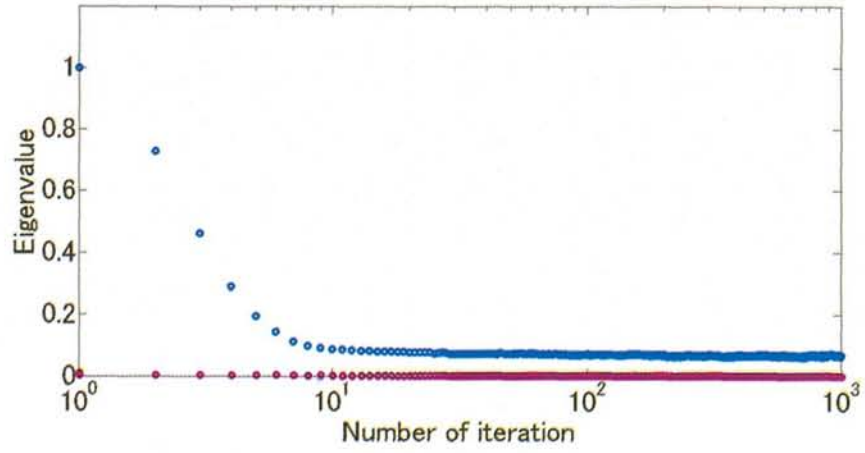


図 13:  $\gamma = 0.01$  とした際の更新行列の固有値推移

表 2:  $\gamma = 0.01$  とした際の更新行列の固有値推移

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
Initial	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1st	1.0000	0.0105	0.0053	0.0008	0.0005
2nd	0.7301	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000
5th	0.1965	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10th	0.0881	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
100th	0.0737	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1000th	0.0700	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

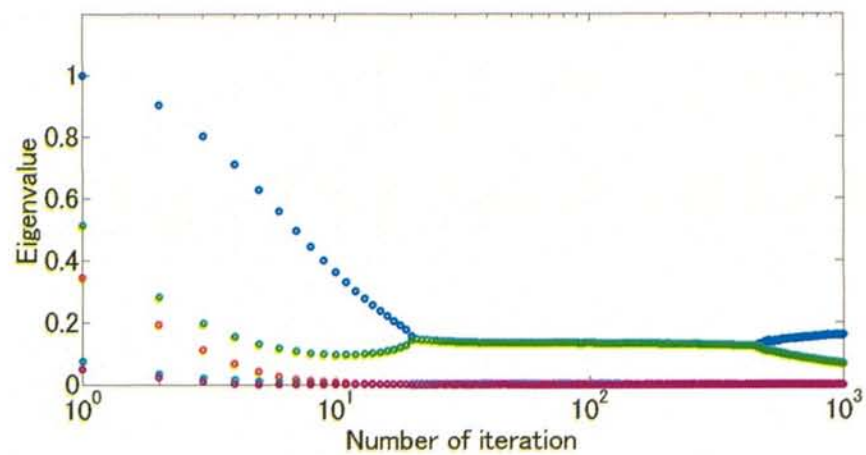


図 14:  $\gamma = 1$  とした際の更新行列の固有値推移

表 3:  $\gamma = 1$  とした際の更新行列の固有値推移

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
Initial	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1st	1.0000	0.5136	0.3446	0.0769	0.0501
2nd	0.9033	0.2857	0.1961	0.0335	0.0250
5th	0.6293	0.1329	0.0425	0.0108	0.0008
10th	0.3621	0.0973	0.0075	0.0016	0.0000
100th	0.1336	0.1336	0.0000	0.0000	0.0000
1000th	0.1609	0.0668	0.0000	0.0000	0.0000

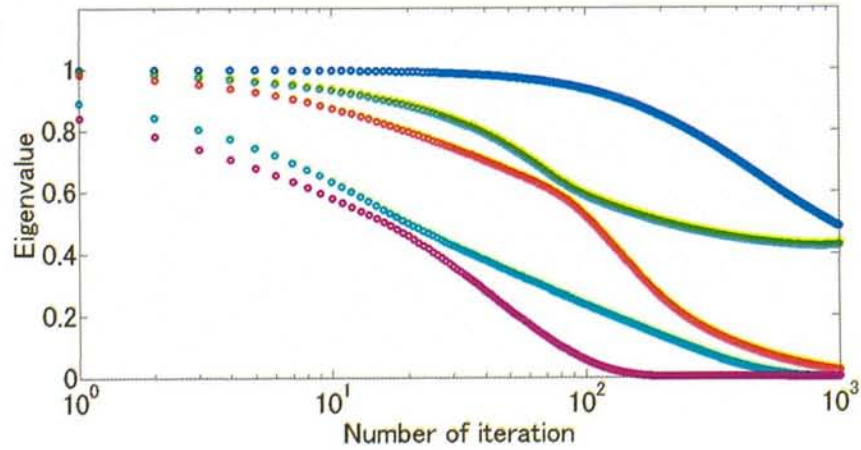


図 15:  $\gamma = 100$  とした際の更新行列の固有値推移

表 4:  $\gamma = 100$  とした際の更新行列の固有値推移

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
Initial	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1st	1.0000	0.9906	0.9814	0.8927	0.8403
2nd	0.9033	0.2857	0.1961	0.0335	0.0250
5th	0.9989	0.9622	0.9245	0.7476	0.6790
10th	0.9970	0.9331	0.8711	0.6373	0.5807
100th	0.9364	0.5898	0.5191	0.2365	0.0540
1000th	0.4877	0.4268	0.0190	0.0008	0.0000

続いて更新行列の固有値の推移について調べる．更新行列とは  $\rho^{(i+1)} - \rho^*$  と  $\rho^{(i)} - \rho^*$  の関係性を表す行列のことであり，定量的には固有値がすべて 0 となれば  $\rho^{(i+1)} = \rho^*$  となる．これも先程と同じく  $\gamma$  の値ごとに結果を載せている．結果をみると先程の結果に対応しており， $\gamma$  の値が大きくなるについで固有値の収束スピードが遅くなっている．また  $\gamma = 0.01$  の際にも固有値はすべて 0 になっていないことから，正確には推定されるパラメータは真値となっていないことがわかる．



表 5:  $\gamma = 0.01$  とした際の各種データの分散の推移

	$\text{Var}[\phi(t + k_m)]$	$\text{Var}[u(t)]$	$\text{Var}[y(t)]$
Initial	5.1471	15.6618	2.6075
1st	1.2869	0.5801	1.1924
2nd	1.0999	0.0989	1.1045
5th	1.0273	0.1433	1.0507
10th	1.0294	0.2023	1.0478
100th	1.0270	0.2066	1.0456
1000th	1.0280	0.2086	1.0468
$\rho^*$	1.0286	0.2082	1.0473

表 6:  $\gamma = 1$  とした際の各種データの分散の推移

	$\text{Var}[\phi(t + k_m)]$	$\text{Var}[u(t)]$	$\text{Var}[y(t)]$
Initial	5.1498	15.6753	2.6116
1st	1.3726	0.7967	1.2330
2nd	1.1937	0.2889	1.1524
5th	1.0645	0.0860	1.0815
10th	1.0297	0.1383	1.0537
100th	1.0309	0.2085	1.0494
1000th	1.0274	0.2084	1.0463
$\rho^*$	1.0283	0.2079	1.0467

表 7:  $\gamma = 100$  とした際の各種データの分散の推移

	$\text{Var}[\phi(t + k_m)]$	$\text{Var}[u(t)]$	$\text{Var}[y(t)]$
Initial	5.1634	15.7080	2.6145
1st	2.8728	6.5738	1.7842
2nd	2.5071	5.1256	1.6537
5th	2.0547	3.3708	1.4832
10th	1.7831	2.3102	1.3872
100th	1.1735	0.3357	1.1349
1000th	1.0276	0.1949	1.0475
$\rho^*$	1.0274	0.2077	1.0463

最後に各種データの分散について結果を示す。ここにおいては一般化出力、入力、出力の分散について調べた。ここでもパラメータの L2 ノルムや更新行列の固有値の推移においてみられたように、 $\gamma$  の値が大きくなるにつれて、制御性能の改善スピードが遅くなっている。一方で推定されるパラメータが真値に収束しない場合においても、制御性能は一般化最小分散制御器を用いた時と同等となっており、真値の周りには、一般化最小分散制御器

とほぼ同等の制御性能を持つ制御器を構成できるパラメータが分布していることが予想される。

#### 5.4 DoA(Domain of Attraction) を利用した安定性判別

本節においては、DoA が成立する際に、制御性能が改善することをシミュレーションを通して示す。具体的には初期制御器パラメータ、提案手法より推定されるパラメータ、一般化最小分散制御におけるモデルベース評価関数の勾配ベクトルより計算される内積が、正の値をとるとき制御系が安定化され、負の値をとるとき制御系が不安定化ないし制御性能が悪化することを示す。設計された制御系が安定であるかどうかは極零点配置図を用いて調べる。極零点配置図とは伝達関数の極と零点をグラフにプロットするもので、伝達関数の極は×、零点は○で表される。離散時間伝達関数の場合には、対象とする伝達関数が安定であるとき、極はすべて単位円内に存在することが証明されている。本シミュレーションにおいては制御対象 1 を制御対象として使用し、制御器パラメータ推定に用いるデータは  $N = 1000$ 、データの取得回数は 1 回とする。また正則化行列は  $R = \gamma I_5$  ( $\gamma = 0, 1$ ) を用いる。ここで  $\rho^{(0)}$  は初期制御器パラメータ、 $\rho^{(1)}$  は提案手法より推定されるパラメータ、 $\nabla J_{MR}$  は一般化最小分散制御におけるモデルベース評価関数の勾配ベクトルとする。はじめに  $\gamma = 1$  とした場合におけるシミュレーション結果について示す。

$$\begin{aligned}\rho^{(0)} &= [0.4485 \quad -0.0112 \quad 0.1126 \quad 0.6947 \quad -0.6268]^T \\ \rho^{(1)} &= [1.0004 \quad -0.1947 \quad 0.1234 \quad 0.4143 \quad -0.5373]^T \\ \nabla J_{MR}(\rho^0) &= [3.9873 \quad 3.9874 \quad 3.9874 \quad 31.0608 \quad 36.0303]^T\end{aligned}$$

基本設定とシミュレーションを行った結果より、 $\rho^{(0)}$ 、 $\rho^{(1)}$ 、 $\nabla J_{MR}$  に関して上記の値を獲得した。この結果により、DoA の成立の判定式となる  $(\rho^{(0)} - \rho^{(1)})\nabla J_{MR}(\rho^0)$  を計算すると以下ようになる。

$$(\rho^{(0)} - \rho^{(1)})\nabla J_{MR}(\rho^0) = 3.9722$$

正の値であるため DoA は成立し、 $\rho^{(1)}$  は評価関数  $J_{MR}(\rho_S, \rho_F)$  の値を小さくするパラメータであることが示される。実際にこのパラメータを制御系に実装した際の入出力データの分散は以下のように小さくなっており手法の有効性が示された。

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \text{Var}[\phi(t + k_m)] & \text{Var}[y(t)] & \text{Var}[u(t)] \end{bmatrix} &= [4.3527 \quad 13.1874 \quad 2.2063] \\ \begin{bmatrix} \text{Var}[\phi(t + k_m)] & \text{Var}[y(t)] & \text{Var}[u(t)] \end{bmatrix} &= [1.2527 \quad 0.5272 \quad 1.1457]\end{aligned}$$

また閉ループ系の感度関数は、図 16 の極零点配置図をみてもわかるとおり安定であり、制御性能が改善する条件を示すことで間接的に制御系が安定化する条件を示すことができた。続いて  $\gamma = 0$  とした場合におけるシミュレーション結果について示す。推定される制御器パラメータを用いて設計される閉ループ系の感度関数は、図 17 の極零点配置図をみてもわかるとおり、極が単位円外に存在するため不安定である。

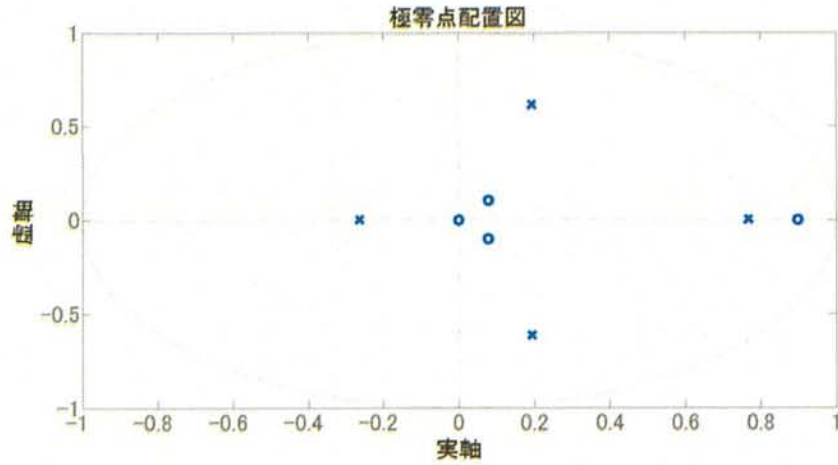


図 16:  $\gamma = 1$  とした際の感度関数の極零点配置図

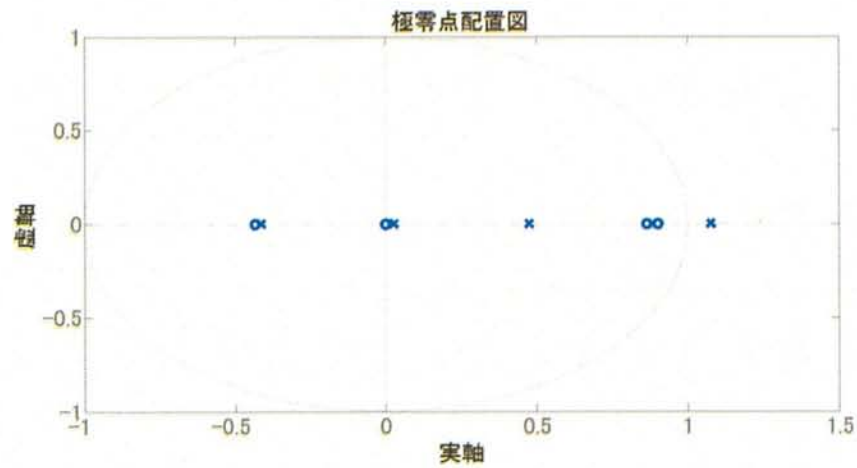


図 17:  $\gamma = 0$  とした際の感度関数の極零点配置図

$$\begin{aligned}\rho^{(0)} &= [0.4485 \quad -0.0112 \quad 0.1126 \quad 0.6947 \quad -0.6268]^T \\ \rho^{(1)} &= [-6.7500 \quad -0.1016 \quad 0.1234 \quad 0.4143 \quad -0.5373]^T \\ \nabla J_{MR}(\rho^0) &= [3.9873 \quad -2.2500 \quad -14.5000 \quad 12.0000 \quad 36.0303]^T\end{aligned}$$

基本設定とシミュレーションを行った結果より,  $\rho^{(0)}$ ,  $\rho^{(1)}$ ,  $\nabla J_{MR}$  に関して上記の値を獲得した. この結果より, DoA の成立の判定式となる  $(\rho^{(0)} - \rho^{(1)})\nabla J_{MR}(\rho^0)$  を計算すると以下ようになる.

$$(\rho^{(0)} - \rho^{(1)})\nabla J_{MR}(\rho^0) = 55.4965$$



獲得される制御系が不安定となっているため、一般化最小分散制御におけるモデルベース評価関数の値は大きくなる。そのため DoA は不成立とならなければならないが、判定式は正の値をとっており DoA は成立してしまっている。本シミュレーションにおいて DoA の成立の可否は、あくまでデータ駆動の評価関数より推定されるパラメータと初期パラメータからなるベクトルと、初期パラメータにおける評価関数の勾配ベクトルとの内積に依存しており、推定されるパラメータの位置によっては、DoA は成り立つものの本来の評価関数を小さくしないパラメータは存在してしまう。一方、 $(\rho^{(1)} - \rho^{(0)})$  は本来の評価関数を小さくする方向であるため、 $\rho^{(1)}$  を調整する制御器パラメータとするのではなく、線分  $\rho^{(1)}\rho^{(0)}$  上の適当なパラメータを制御器パラメータとすることで、制御性能を改善するパラメータを獲得できると期待される。

## 5.5 正則化項のオフライン設計

本節においては、正則化項をオフライン設計で更新していくことで、制御性能を改善できることを示す。そのために本シミュレーションにおいては、データ駆動型一般化最小分散制御に L2 正則化を導入するという提案手法に対して本アプローチを適用することで、制御性能が改善することを示す。具体的には正則化項のオフライン設計を提案手法に導入することで、繰り返し設計を 1 回とした際の制御器調整による制御性能の改善幅を上回れるかを本シミュレーションにおいては検証する。またシミュレーションにおいては、推定されるパラメータと真値の距離の推移、更新行列の固有値の推移、そして逐次設計される制御系の一般化出力、入力、出力の分散について調べる。ここで推定されるパラメータと真値との距離の推移は両ベクトルの差を L2 ノルムで評価する。本シミュレーションにおいては制御対象 1 を制御対象として使用し、制御器パラメータ推定に用いるデータは  $N = 1000$ 、データの取得回数は 1 回とする。また正則化行列は  $R = \gamma I_5 (\gamma = 1)$  を用いる。また正則化項をオフラインで更新する回数は 1000 回とする。

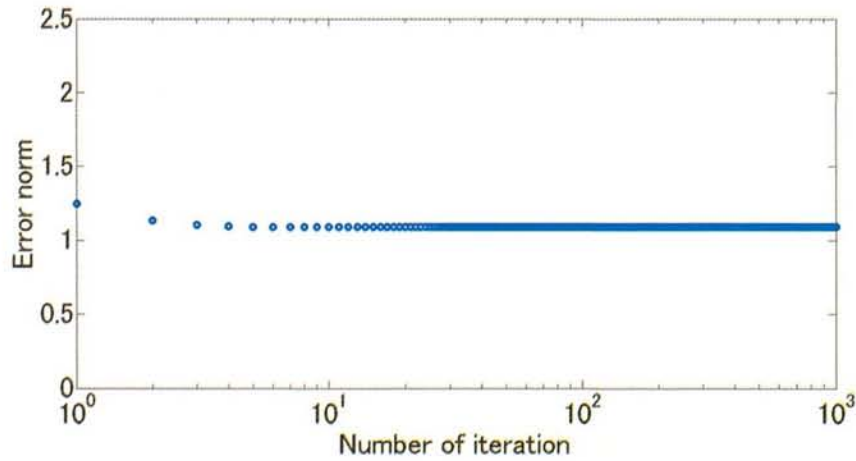


図 18: 正則化項のオフライン設計を行った際の推定されるパラメータと真値との距離の推移

はじめに推定されるパラメータの真値との距離の推移について調べる。図 18 にてこの結

果は示されるが、これをみるとわずかながらオフライン設計により推定されるパラメータの真値との距離が縮小していることが分かる。一方でオフライン設計の回数がある程度までいくと、その距離は縮小しなくなっており、これは4.1節にて示した、オフライン設計を適用した場合の更新行列には、固有値1が存在することに対応していると考えられる。

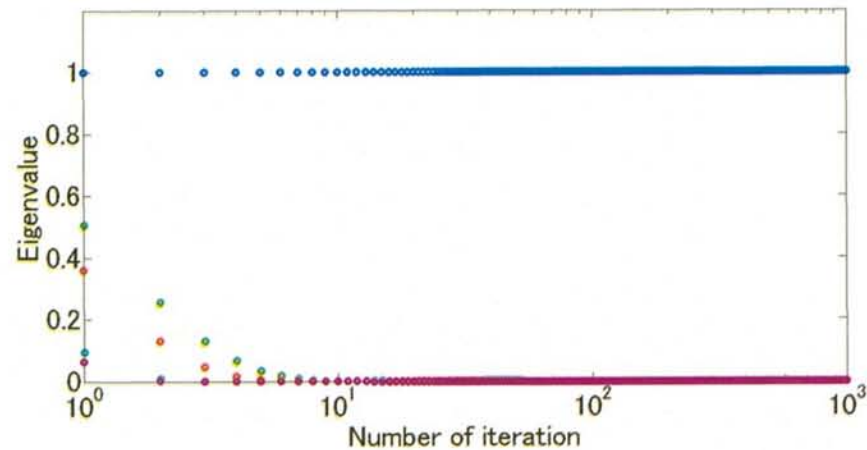


図 19: 正則化項のオフライン設計を行った際の更新行列の固有値推移

表 8: 正則化項のオフライン設計を行った際の更新行列の固有値推移

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
Initial	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1st	1.0000	0.5074	0.3623	0.0956	0.0641
2nd	1.0000	0.2574	0.1313	0.0091	0.0041
5th	1.0000	0.0336	0.0062	0.0000	0.0000
10th	1.0000	0.0011	0.0000	0.0000	0.0000
100th	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1000th	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

続いて更新行列の固有値の推移について調べる。図 19、表 8 にてこの結果は示されるが、これをみるとオフライン設計により更新行列の固有値は小さくなっており、オフライン設計を繰り返すことで 0 に収束しているものもある。しかし最大固有値は 1 で固定されており、これが推定されるパラメータが真値に対して誤差を生じる原因となっている。

表 9: 正則化項のオフライン設計を行った際の各種データの分散の推移

	$\text{Var}[\phi(t + k_m)]$	$\text{Var}[u(t)]$	$\text{Var}[y(t)]$
Initial	4.0473	12.2651	2.0698
1st	1.2071	0.7359	1.0854
2nd	1.1529	0.5731	1.0615
5th	1.1331	0.5205	1.0521
10th	1.1323	0.5177	1.0518
100th	1.1323	0.5177	1.0518
1000th	1.1323	0.5177	1.0518
$\rho^*$	0.9191	0.1893	0.9357

最後に各種データの分散について結果を示す．ここにおいては一般化出力，入力，出力の分散について調べた．図 9 で示されるが，これをみるとオフライン設計により設計されたパラメータを用いた場合には，わずかながら制御性能が改善していることがみてとれる．一方で一般化最小分散制御器を実装した場合と比較すると，その性能には差があり，改善の余地がみられた．

## 5.6 正則化行列を総平均二乗誤差を評価基準として設計した際の制御性能評価

本節においては，総平均二乗誤差を評価基準として設計された正則化行列を用いて評価関数を構築した際に，推定される制御器パラメータが制御性能をどの程度改善するか統計的に調べる．シミュレーションにおいては，はじめに取得された入出力データより式 (92) で表現される総平均二乗誤差を計算する．続いて式 (92) を最小化する  $\gamma$  を探索するが，ここにおいては最適化変数  $\gamma$  に対して式 (92) は非線形であるため，MATLAB の関数“fmincon”を使用する．そして，このように獲得された  $\gamma$  を用いて提案手法の評価関数を構築し，制御器パラメータを推定する．そして設計される制御系の一般化出力の分散について確認する．また，制御対象 1 を制御対象として使用し，制御器パラメータ推定に用いるデータは  $N = 1000$ ，データの取得回数は 1 回，シミュレーションは繰り返し 100 回行うものとする．はじめに，制御対象 1 に対して，総平均二乗誤差を評価基準とした際に最適な  $\gamma$  を探索する． $\gamma$  は評価関数上で誤差二乗和と基準点からの偏差，どちらを小さくすることに重きを置くのか調整する設計パラメータである．取得された入出力データより，導出される  $\gamma$  は以下となった．

$$\text{Ave}(\hat{\gamma}) = 24.1670$$

$$\text{Var}(\hat{\gamma}) = 0.6888$$

この  $\gamma$  より推定される制御器パラメータを用いて設計される制御系の一般化出力の分散は以下のとおりである．ここにおいては推定された  $\gamma$  の性能を確認するべく， $\gamma = 100$  とした際に獲得される一般化出力の分散と比較をしている．



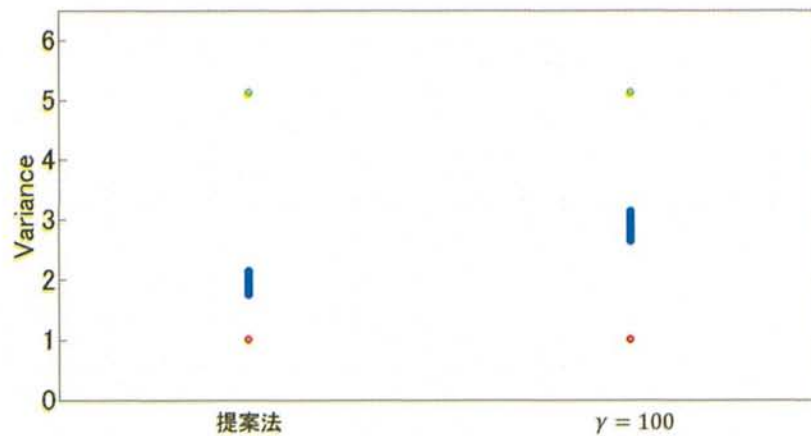


図 20: 一般化出力の分散の比較

左のデータプロットは $\gamma$ を総平均二乗誤差を評価基準として推定した際の一般化出力の分散であり，右のデータプロットは $\gamma = 100$ とした際の一般化出力の分散である．緑点は初期の一般化出力の分散，青点は設計される制御系の一般化出力の分散，赤点は最小分散値を示す．これをみると取得されるデータごとに総平均二乗誤差を計算し $\gamma$ を推定する方が，設計ごとの制御性能が最小分散値に近く，制御性能のばらつきも小さかった．

## 6 おわりに

本研究においては、L2 正則化をデータ駆動型一般化最小分散制御に導入することで、プラントパラメータを経由することや、制御器の構造を PID 型とせず一般化最小分散制御器とした場合にも、取得された閉ループデータより直接制御器設計を行うことを可能とした。また理論解析についても行い、正則化項を推定された制御器パラメータ、取得された入出力データを用いて更新することで、推定される制御器パラメータの真値との距離を逐次縮小できることを証明した。また提案手法において、データの取得回数の削減を目的として、正則化項をデータの取得を再度することなく更新する、正則化項のオフライン設計や、総平均二乗誤差を評価基準として正則化項の最適化計算を行った。特に正則化項のオフライン設計においては、最小分散値を獲得することはできなかったものの、制御性能の改善を確認することができ、その有効性を示すことができた。今後の課題としては、設計される制御系の安定性を取得されるデータより保証することである。本研究においては、DoA の考え方を利用することで、制御系が安定化された場合に対して成立する条件を示すことができた。一方で、シミュレーションにおいては、制御性能を悪化させるような制御器パラメータの場合においても、DoA が成立していることが見受けられた。しかし、推定された制御器パラメータ  $\rho^{(1)}$  と初期制御器パラメータ  $\rho^{(0)}$  からなるベクトルは、制御性能を改善する方向を示しており、適切にその線分上で制御性能を改善するパラメータを探索する手法を見つける手法を考案することが今後の研究では望まれる。制御性能を改善することを保証できれば、間接的に制御系の安定性を保証することにもつながり、本研究で目的としたことは達成できると考えている。

## 参考文献

- [1] Zhong-Sheng. Hou, Zhuo. Wang: From model-based control to data-driven control: Survey, classification and perspective, *Information Science*, vol. 235, pp. 3-35, 2013.
- [2] R.E. Kalman: A new approach to linear filtering and prediction problems, *transactions ASME, series D, Journal of Basic Engineering*, vol. 82, pp. 34-45, 1960.
- [3] R.E. Kalman: Contributions to the theory of optimal control, *Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana*, vol. 5, pp. 102-119, 2009.
- [4] H. Hjalmarsson, M. Gevers, S. Gunnarsson, and L. Lequin: Iterative feedback tuning: Theory and applications, *IEEE Control System Magazine*, vol. 18, no. 4, pp. 26-41, 1998.
- [5] H. Hjalmarsson: Iterative feedback tuning overview, *Int. J. Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 16, no. 5, pp. 373-395, 2002.
- [6] L. C. Kammer, R. R. Bitmead, and P. L. Bartlett: Direct iterative tuning via spectral analysis, *Automatica*, vol. 36, pp. 1301-1307, 2000.
- [7] G. O. Guardabassi and S. M. Savaresi: Virtual reference direct design method: an off-line approach to data-based control system design, *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 45, no.5:, pp. 954-959, 2000.
- [8] M. C. Campi, A. Lecchini, and S. M. Savaresi: Virtual reference feedback tuning: a direct method or the design of feedback controllers, *Automatica*, vol. 38, no. 8, pp. 1337-1346, 2002.
- [9] S. Souma, O. Kaneko and T. Fujii: A new method of controller parameter tuning based of input-output data: fictitious reference iterative tuning (FRIT), in *Proc. IFAC Int. Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing*, 2004, pp. 788-794.
- [10] O. Kaneko: Data-driven controller tuning: FRIT Approach, in *Proc. IFAC Int. Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing*, 2013, pp. 326-336.
- [11] K. Ando, S. Masuda, and K. Kano: Data-driven generalized minimum variance regulatory control, in *Proc. The European Control Conference*, Strasbourg, France, Jun. 24-27, 2014, pp. 418-423.
- [12] R. Yokoyama, S. Masuda, and M. Kano: Data-driven generalized minimum variance regulatory control for model-free PID gain tuning, in *Proc. of Control Applications(CCA) 2015 IEEE Conference*, 2015, pp. 82-87.
- [13] R. Yokoyama and S. Masuda: Data-driven generalized minimum variance regulatory control with constrained controller structure, in *Proc. of 2016 International Conference on Advanced Mechatronic Systems*, Melbourne, Australia, 2016, pp. 17-22.



- [14] R. Yokoyama and S. Masuda: Convergence property for iterative data-driven PID gain tuning based on generalized minimum variance regulatory control, in *Proc. of The 6th International Symposium on Advanced Control of Industrial Processes*, Taipei, Taiwan, 2017, pp. 511-516.
- [15] A. E. Hoerl, and R. E. Kennard: Ridge regression: biased estimation for nonorthogonal problems, *Technometrics*, vol. 12, no. 1, pp. 55-67, 1970a.
- [16] A. E. Hoerl, and R. E. Kennard: Ridge regression: applications to nonorthogonal problems, *Technometrics*, vol. 12, no. 1, pp. 69-82, 1970b.
- [17] T. Chen, H. Ohlsson, and L. Ljung: On the estimation of transfer functions, regularizations and Gaussian processes-Revisited, *Automatica*, vol. 48, pp. 1525-1535, 2012.
- [18] T. Chen, H. Ohlsson, G. C. Goodwin and L. Ljung: Kernel selection in linear system identification. Part II: A classical perspective." In *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC)*, 2011, pp. 4326-4331.
- [19] S. Formentin, and A. Karimi: Enhancing statistical performance of data-driven controller tuning via  $L_2$ -regularization, *Automatica*, vol. 50, no. 8, pp. 1514-1520, 2014.
- [20] A. Karimi, L. Mišković, and D. Bonvin: Iterative correlation-based controller tuning, *Int. J. of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 18, no. 8, pp. 645-664, 2004.
- [21] A. S. Bazanella, M. Gevers, L. Mikovi, and B. D. O. Anderson: Iterative minimization of  $H_2$  control performance criteria, *Automatica*, vol. 44, pp. 2549-2559, 2008.
- [22] S. Okada, and S. Masuda: Data-Driven Linearly Parametrized Controller Design Based on Minimum Variance Evaluation, In *11th Asian Control Conference (ASCC)*, 2017.
- [23] 地道: 相対効率にもとづくリッジ係数の選択アルゴリズム, *経済学論究*, vol. 66, no. 1, pp. 137-162, 2012.

## 謝辞

本研究を終えるにあたり、3年間熱心なご指導ならびに貴重なご意見を頂いた首都大学東京・増田士朗教授に深く感謝するとともに、熱く御礼申し上げます。学会への参加や工場見学をはじめとする数多くの経験をさせていただきましたこと重ねて感謝申し上げます。また、研究の進め方について多くの指摘をいただき、お世話になりました研究室の諸氏に心から感謝いたします。そして最後になりますが、お忙しいところ論文の査読をしていただいた首都大学東京・梶原康博教授、首都大学東京・瀬尾明彦教授に重ねて感謝申し上げます。

